R. CLUZEL H. COURT

arithmétique

initiation à l'algèbre

lycées modernes
et techniques

collèges d'enseignement
général

candidats aux
concours administratifs

DELAGRAVE

ARITHMÉTIQUE

INITIATION A L'ALGÈBRE

ARITHMÉTIQUE

INITIATION A L'ALGÈBRE

à l'usage
des **Lycées et Collèges**
(Classes de 5e, 4e et 3e),
et des **Candidats aux Concours administratifs**

par

R. CLUZEL
Professeur à l'École normale nationale d'enseignement technique de Paris.

H. COURT
Professeur honoraire à l'École des Hautes Études Commerciales.

160e mille



LIBRAIRIE DELAGRAVE
1970

CHAPITRE PREMIER

OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES ENTIERS

Classe de Cinquième des Lycées et Collèges.

1. **Les nombres entiers.**
2. **Addition. Somme.**
3. **Multiplication. Produit. Puissances.**
4. **Suites d'additions et de soustractions. Usage des parenthèses.**
5. **Produits de sommes.**
6. **Pratique de l'addition.**
7. **Pratique de la multiplication.**
8. **Soustraction. Différence.**
9. **Polynômes arithmétiques.**
10. **Produits de différences.**
11. **Pratique de la soustraction.**
12. **Multiples et diviseurs. Quotient exact.**
13. **Multiples et diviseurs** *(suite)*.
14. **Quotient de deux nombres à une unité près.**

I. LES NOMBRES ENTIERS

I. Le nombre entier.

Voici plusieurs collections, plusieurs ensembles d'objets identiques, des livres par exemple, trois livres, cinq livres, onze livres (figure 1).



Fig. 1. — *Comptez* chaque collection de livres.

1° Chaque livre est une *unité* de la collection, un élément de l'ensemble auquel il appartient. ***On appelle unité chacun des objets distincts d'une collection.***

2° Trois, cinq, onze... sont des *nombres entiers*. ***Un nombre entier exprime combien une collection d'objets distincts contient d'unités.***

3° ***Compter,*** c'est chercher combien une collection contient d'unités.

2. Comparaison de deux nombres.

Voici deux collections, l'une composée de timbres-poste, l'autre d'enveloppes (fig. 2).

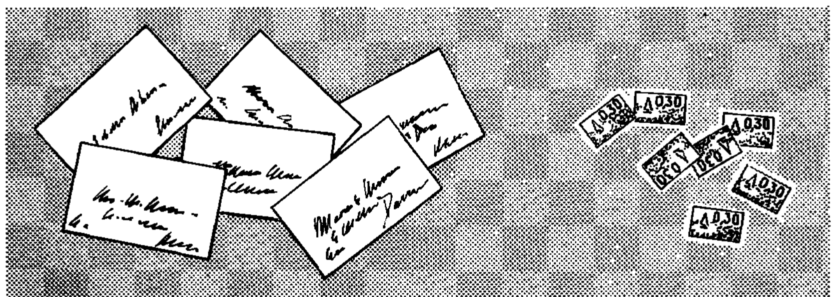


Fig. 2. — Comment *comparer* le nombre de timbres-poste et le nombre d'enveloppes ?

Comptons les timbres : nous trouvons un nombre a.
Comptons les enveloppes : nous trouvons un nombre b.

Et maintenant, sur chaque enveloppe, posons un timbre. Trois cas peuvent se présenter :

1er cas. — Lorsque l'on a posé un timbre sur chacune des enveloppes, la collection de timbres est épuisée (fig. 3) : les deux collections contenaient le même nombre d'unités. On dit que ***le nombre a est égal au nombre b***, ce que l'on écrit :

$$a = b \quad (a \text{ égale } b).$$

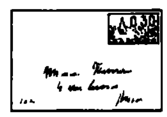
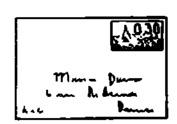
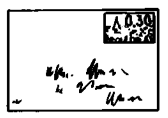




Fig. 3. — Le nombre de timbres-poste est *égal* au nombre d'enveloppes.

On obtient ainsi une égalité dont a est le premier membre et b le second membre.

2e cas. — Lorsqu'on a posé un timbre sur chacune des enveloppes, il reste encore des timbres (fig. 4). ***Le nombre a de timbres est dit supérieur au nombre b d'enveloppes***, ce que l'on traduit par l'inégalité :

$$a > b \quad (a \text{ supérieur à } b, \text{ ou } a \text{ plus grand que } b).$$

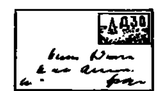
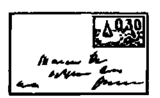
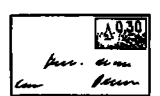
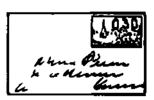






Fig. 4. — Le nombre de timbres-poste est *supérieur* au nombre d'enveloppes ($6 > 4$).

3e cas. — La collection de timbres est épuisée avant que l'on ait pu poser un timbre sur chaque enveloppe (fig. 5). Le ***nombre a de timbres est dit inférieur au nombre b d'enveloppes***, ce que l'on traduit par l'inégalité :

$$a < b \quad (a \text{ inférieur à } b, \text{ ou } a \text{ plus petit que } b).$$

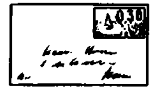
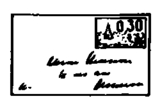
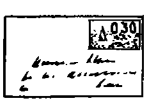
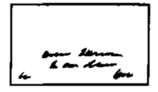
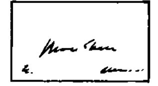






Fig. 5. — Le nombre de timbres-poste est *inférieur* au nombre d'enveloppes ($3 < 5$).

Dans ces deux derniers cas, les nombres a et b sont *différents* :

$$a \neq b \quad (a \text{ différent de } b).$$

3. La suite naturelle des nombres entiers.

A une collection contenant a objets, ajoutons une unité : nous obtenons une nouvelle collection qui contient un objet de plus que la première ; le nombre qui lui correspond est le nombre entier immédiatement supérieur au nombre a.

Si nous partons du nombre *un*, nous obtenons ainsi, de proche en proche, la suite naturelle des nombres entiers :

un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix..., etc...

4. La suite des nombres est illimitée.

A un nombre entier, il est, en effet, toujours possible d'ajouter une unité pour former le suivant.

Dans la suite naturelle des nombres, deux nombres sont dits *consécutifs* s'ils viennent immédiatement l'un après l'autre.

EXEMPLE: : *huit* et *neuf*.

5. La numération est l'ensemble des règles qui permettent d'énoncer et d'écrire tous les nombres.

Il est évidemment impossible de donner un nom spécial à chaque nombre entier ou de représenter chacun de ces nombres par un signe particulier.

La numération parlée est un ensemble de règles qui permet d'énoncer tous les nombres à l'aide de quelques mots.

La numération écrite est, de même, un ensemble de règles qui permet d'écrire tous les nombres avec dix signes seulement.

6. Numération parlée.

Les neuf premiers nombres s'appellent les *unités simples* ou *unités du premier ordre*.

Une collection de *dix unités* simples constitue une *dizaine* ou une *unité de deuxième ordre*.

Une collection de *dix dizaines* constitue une *centaine* ou une *unité du troisième ordre*... et ainsi de suite.

Ainsi :

Dix unités d'un ordre quelconque forment une unité de l'ordre immédiatement supérieur.

Cette convention définit la numération à base dix, ou *numération décimale*.

Les ordres sont groupés en classes ; chaque classe comprend trois *ordres* : *unités, dizaines, centaines*.

Classe des milliards.			*Classe des millions.*			*Classe des mille.*			*Classe des unités simples.*		
← etc. ← etc.	**11e ordre** ou dizaines de milliards	**10e ordre** ou unités de milliards	**9e ordre** ou centaines de millions	**8e ordre** ou dizaines de millions	**7e ordre** ou unités de millions	**6e ordre** ou centaines de mille	**5e ordre** ou dizaines de mille	**4e ordre** ou unités de mille	**3e ordre** ou centaines	**2e ordre** ou dizaines	**1er ordre** ou unités simples

Rappelons que les dizaines portent des noms particuliers : dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix.

Comptons les objets d'une collection :

1° Réunissons-les par groupes de dix, c'est-à-dire par dizaines ; nous formons un certain nombre de dizaines et il reste, par exemple, *trois* objets ;

2° Réunissons maintenant les dizaines par groupes de dix ; nous formons des centaines, *quatre* par exemple, et il reste *cinq* dizaines.

La collection comprend *quatre centaines, cinq dizaines, trois unités*, soit *quatre cent cinquante-trois unités*.

7. Numération écrite.

Avec les signes suivants appelés *chiffres* :

un,	deux,	trois,	quatre,	cinq,	six,	sept,	huit,	neuf,
1	2	3	4	5	6	7	8	9

et le signe zéro (0) qui exprime l'absence d'unité, on peut écrire tous les nombres, grâce aux trois conventions suivantes.

1° Le chiffre occupant, dans un nombre entier, le premier rang à partir de la droite représente les unités simples.

2° Tout chiffre placé à la gauche d'un autre représente des unités de l'ordre immédiatement supérieur.

3° Lorsqu'un ordre d'unités manque dans un nombre, sa place est tenue par le signe 0.

Ainsi le nombre vingt-cinq mille quarante-deux s'écrit : 25 042.

8. Valeur absolue et valeur relative d'un chiffre.

Dans le nombre 834, le chiffre 3 a pour valeur absolue 3 et pour valeur relative 30.

La ***valeur absolue*** d'un chiffre est le nombre d'unités qu'il représente lorsqu'il est considéré isolément.

Sa ***valeur relative*** est le nombre d'unités qu'il représente lorsqu'il est écrit dans un nombre.

9. Nombre cardinal, nombre ordinal.

Un ***nombre cardinal*** exprime le *nombre d'unités* d'une collection.

EXEMPLE : 5, pour la collection d'enveloppes de la figure 5.

Mais, lorsqu'on indique par un nombre le *rang* d'un objet dans une collection, ce nombre est dit ***ordinal***. Ainsi (fig. 5), la première enveloppe sans timbre dans la collection occupe le rang 4 à partir de la gauche ; c'est la quatrième (4e) de cette collection.

EXERCICES

1. Quel est le plus petit nombre de 2 chiffres? de 3 chiffres? de 4 chiffres?

2. Quel est le plus grand nombre de 2 chiffres? de 3 chiffres? de 4 chiffres?

3. Combien y a-t-il de nombres de 1 chiffre? de 2 chiffres? de 3 chiffres? de 4 chiffres?

4. Quel est le 12ᵉ nombre de 3 chiffres? le 135ᵉ nombre de 3 chiffres? le 2 568ᵉ nombre de 4 chiffres?

5. Combien faut-il de chiffres pour écrire tous les nombres de deux chiffres?

6. Combien faut-il de chiffres pour écrire les nombres de 1 à 100 inclus? de 1 à 524 inclus? de 82 à 524 inclus?

7. Combien faut-il de caractères d'imprimerie pour paginer un livre de 240 pages?

8. Pour numéroter les folios d'un livre, on a écrit 249 chiffres. Combien ce livre contient-il de folios?

9. Pour numéroter les pages d'un livre, on a employé 1 041 caractères. Combien de fois a-t-on employé le chiffre 1? le chiffre 4?

10. Écrire tous les nombres de trois chiffres formés avec les chiffres 5, 8, 3 dans un ordre quelconque.

11. Avec les chiffres 1, 2, 3, 4 employés chacun une fois, combien peut-on écrire de nombres de 4 chiffres? Quel est le plus grand? le plus petit? Rangés dans l'ordre de grandeur croissante, quel est le 8ᵉ? le 12ᵉ?

12. Combien y a-t-il de nombres de 3 chiffres qui contiennent un chiffre 7 ? deux chiffres 7? trois chiffres 7?

13. Combien existe-t-il de nombres de 3 chiffres qui ne changent pas lorsqu'on renverse l'ordre des chiffres?

14. Entre les deux chiffres du nombre 47, on intercale un zéro. De combien augmente le nombre? On intercale un zéro entre les deux chiffres d'un nombre : le nouveau nombre dépasse de 720 l'ancien. Quel était le chiffre des dizaines de l'ancien?

15. Un nombre de trois chiffres se termine par 5. On intercale un zéro entre le chiffre des unités et celui des dizaines : le nombre augmentant de 2880, trouver le premier nombre.

16. Un nombre augmente de 72 468 quand on écrit deux zéros à sa droite. Quel est ce nombre?

17. Sachant que $a < b$, $b < c$, $c < d$, comparer a et d. (a, b, c, d sont des nombres entiers.)

18. Sachant que $a \leqslant b$, $b \leqslant c$, $c \leqslant d$, comparer a et d. (a, b, c, d sont entiers.)

19. Un nombre entier a est tel que $5 < a < 9$. Quelles sont les valeurs de a répondant à cette double condition?

20. Les nombres entiers a, b, c sont tels que $a < b < c$; $2 < a < 6$; $3 < c < 6$. Trouver les nombres a, b, c.

21. Combien de nombres entiers répondent à la fois aux conditions $a > 5$ et $a < 8$? Peut-on compter le nombre de valeurs de a qui répondraient aux conditions $a > 5$ et $a > 8$?

22. *Système de numération à base 8.* — Sachant que : 1° huit unités d'un ordre quelconque constituent une unité de l'ordre immédiatement supérieur; 2° tout chiffre placé à la gauche d'un autre représente des unités de l'ordre immédiatement supérieur, combien de chiffres emploie-t-on dans ce système? Comment s'écrit huit « parlé »? Écrire le nombre 3 245, du système à base 8, dans le système à base 10.

23. ***Une machine à calculer électronique utilise le système à base 2 ou binaire.*** — Dans ce système, les seuls chiffres utilisés sont 0 et 1. Les nombres 1, 2, 3, 4, 5 s'écrivent donc : 1, 10, 11, 100, 101.

Écrire dans ce système la suite des nombres de 6 à 16 inclus. Comment s'écrit, dans le système décimal, le nombre 1 000 000 du système binaire ? A quoi reconnaît-on qu'un nombre du système binaire est pair dans le système décimal ?

24. ***Les chiffres romains et la numération romaine.*** — 1° Les signes utilisés sont :

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

2° Plusieurs chiffres égaux écrits à la suite s'ajoutent :

(XX = 20) ; (XXXVII = 37).

3° Tout chiffre écrit à la droite d'un chiffre plus fort que lui s'ajoute à celui-ci (DL = 550).

4° Tout chiffre écrit à la gauche d'un chiffre plus fort que lui se retranche de celui-ci (XL = 40).

5° Tout nombre surmonté d'un trait exprime des mille ; de deux traits, des millions... ($\overline{\text{V}}$ = 5 000)

Travail demandé. — *a*) Écrire en chiffres romains : 215, 1 143, 2 649.

b) Lire : CLXXVI ; MDCCXVII ; IX ; XC ; $\overline{\text{CD}}$ CCXXVIII.

2. ADDITION. SOMME

1. Somme de deux nombres.

EXEMPLE. — Sur une table se trouvent une collection de 8 livres et, à côté, une collection de 3 livres. Réunissons les deux collections, par exemple en posant les livres de la seconde collection sur ceux de la première. Nous obtenons une nouvelle collection qui est la ***somme*** des deux collections précédentes.

La somme de deux collections de même nature est la collection obtenue par leur réunion.

Comptons les livres de cette nouvelle collection. Nous en trouvons 11. Le nombre 11 est la somme des deux nombres 8 et 3, ce que nous écrivons :

$$8 + 3 = 11.$$

La somme c de deux nombres a et b s'écrit de même :

$$a + b = c.$$

La somme de deux nombres est le nombre obtenu en réunissant les unités composant ces deux nombres.

2. Somme de plusieurs nombres.

Trois sacs contiennent respectivement 7 oranges, 5 oranges, 8 oranges. Versons le contenu du premier sac, puis celui du second dans une coupe. La coupe contient un nombre d'oranges égal à 7 + 5 = 12. Versons ensuite, dans la même coupe, le contenu du troisième sac. Elle contient alors un nombre d'oranges égal à 12 + 8 = 20.

20 est la ***somme*** (ou le ***total***) de trois nombres : 7, 5, 8, ce que l'on écrit :

$$7 + 5 + 8 = 20.$$

La somme de plusieurs nombres, donnés dans un certain ordre, est le nombre obtenu en ajoutant le second au premier, le troisième au résultat obtenu, le quatrième au nouveau résultat et ainsi de suite jusqu'à épuisement des nombres donnés.

7, 5, 8 sont les ***termes*** de la somme.

La somme des nombres a, b, c, d, représentés par des lettres, s'écrit :

$$a + b + c + d$$

Une somme effectuée (ou partielle) s'écrit *entre parenthèses* : les opérations indiquées dans la parenthèse doivent être alors effectuées les premières.

EXEMPLES :

$$7 + \underbrace{(18 + 5)}_{23} ; \qquad 7 + \underbrace{(11 + 4)}_{15} + 2 ;$$

$$a + (b + c) ; \qquad a + (b + c) + d.$$

L'addition est l'opération qui permet de calculer la somme de deux ou de plusieurs nombres.

Une somme effectuée comprend parfois des *termes qui sont eux-mêmes des sommes effectuées*. Ces dernières sommes sont alors placées entre parenthèses, la grande somme effectuée l'étant entre *crochets*.

EXEMPLES : 1° $[(8 + 6) + 7] + 3$.

On calcule ainsi cette somme : $8 + 6 = 14$; $14 + 7 = 21$; $21 + 3 = 24$.

2° $11 + [(3 + 5) + (7 + 2)]$.

On fait ainsi le calcul : $3 + 5 = 8$; $7 + 2 = 9$; $8 + 9 = 17$; $11 + 17 = 28$.

REMARQUES. — 1° L'addition à un nombre du nombre zéro est sans effet sur ce nombre : $a + 0 = 0 + a = a$. On dit que zéro est *élément neutre* pour l'addition.

2° Un nombre est égal à la *somme des valeurs relatives* de ses chiffres ; par exemple :

$$2\,584 = 2\,000 + 500 + 80 + 4.$$

3. Propriété commutative des sommes.

Un marchand de vins en gros verse dans une cuve trois sortes de vin rouge : 5 hl *de vin du Gard, 7* hl *de vin du Gers et 11* hl *de vin d'Algérie.*

Il obtient un mélange dont la capacité est la somme des capacités des vins mélangés, soit : *5* hl + *7* hl + *11* hl.

Le total serait *évidemment le même* s'il commençait par verser dans la cuve le vin du Gers, puis celui d'Algérie, puis celui du Gard ; dans ce cas, la somme s'écrirait : 7 *hl* + 11 *hl* + 5 *hl*.

Donc :

$$5\ hl + 7\ hl + 11\ hl = 7\ hl + 11\ hl + 5\ hl,$$

ou :

$$5 + 7 + 11 = 7 + 11 + 5.$$

$$\boxed{a + b + c + d = b + d + c + a}$$

Lorsqu'on intervertit les termes d'une somme, le total ne change pas.

4. Propriété associative des sommes.

1° *Ayant encaissé au cours d'une semaine : le lundi, chez Pierre, 112 F ; le mardi, chez Louis, 356 F ; le mercredi, chez Louis, 248 F ; le samedi, chez Marcel, 234 F, le total de mes encaissements de la semaine est :*

$$112\ F + 356\ F + 248\ F + 234\ F.$$

Le total serait *évidemment le même* si j'avais reporté au mercredi l'encaissement que je devais faire le mardi chez Louis. Dans ce cas, Louis m'aurait versé le mercredi :

$$356\ F + 248\ F = 604\ F.$$

Le total des encaissements de la semaine aurait été exprimé par la somme :

$$112\ F + 604\ F + 234\ F.$$

Donc :

$$112 \text{ F} + 356 \text{ F} + 248 \text{ F} + 234 \text{ F} = 112 \text{ F} + (356 \text{ F} + 248 \text{ F}) + 234 \text{ F}$$

ou :

$$112 + 356 + 248 + 234 = 112 + (356 + 248) + 234.$$

$$\boxed{a + b + c + d = a + (b + c) + d}$$

Lorsqu'on remplace plusieurs termes d'une somme par leur somme effectuée, le total ne change pas.

2° *Un père donne des étrennes à chacun de ses trois fils : 15 F à Alain, 12 F à Éric, 17 F à Marc.*

La somme de ses dons est :

$$15 \text{ F} + 12 \text{ F} + 17 \text{ F}$$

Le total aurait été *évidemment le même* si, par exemple, le père avait donné à Eric une première fois 8 F et une deuxième fois 4 F.

Nous aurions alors écrit comme suit la somme des dons :

$$15 \text{ F} + 8 \text{ F} + 4 \text{ F} + 17 \text{ F}.$$

Donc :

$$15 \text{ F} + 12 \text{ F} + 17 \text{ F} = 15 \text{ F} + 8 \text{ F} + 4 \text{ F} + 17 \text{ F},$$

ou :

$$15 + 12 + 17 = 15 + 8 + 4 + 17.$$

$$\boxed{a + (b + c) + d = a + b + c + d}$$

Lorsqu'on remplace un terme d'une somme par plusieurs autres termes dont il est lui-même la somme, le total ne change pas.

5. Ajouter une somme à un nombre.

Un caissier, qui a déjà 3 500 F en caisse, donne à son garçon de recettes l'ordre d'encaisser trois sommes s'élevant respectivement à 257 F ; 800 F ; 509 F.

1° Le garçon de recettes peut faire les trois encaissements et rapporter la totalité des sommes encaissées, soit :

$$257 \text{ F} + 800 \text{ F} + 509 \text{ F} = 1\,566 \text{ F}.$$

La caisse renferme alors :

$$3\,500 \text{ F} + 257 \text{ F} + 800 \text{ F} + 509 \text{ F} = 3\,500 \text{ F} + 1\,566 \text{ F} = 5\,066 \text{ F}.$$

2° Mais le garçon de recettes peut, après chaque encaissement, en rapporter le montant au caissier. La caisse renferme alors :

Après le 1er encaissement : 3 500 F + 257 F = 3 757 F.
Après le 2e encaissement : 3 757 F + 800 F = 4 557 F.
Après le 3e encaissement : 4 557 F + 509 F = 5 066 F.

En définitive, la somme totale apportée à la caisse est toujours *la même*.

Pour ajouter une somme à un nombre, on peut :

1° soit calculer la somme et ajouter le résultat au nombre;

2° soit ajouter au nombre successivement chacun des termes de la somme.

$$\boldsymbol{a + (b + c + d) = a + b + c + d}$$

Ce deuxième procédé est souvent employé en calcul littéral et en calcul mental.

EXEMPLES. — $12 + (a + 5) = 12 + 5 + a = 17 + a.$
$34 + 92 = 34 + 90 + 2 = 124 + 2 = 126.$

6. L'addition, les égalités et les inégalités.

1° **L'addition et les égalités.** — Soient a et b deux nombres égaux (a étant par exemple un nombre d'enveloppes et b le même nombre de timbres-poste). L'égalité s'écrit :

$$a = b \qquad (1)$$

a est le premier membre de cette égalité, b le second membre.

Au nombre a, ajoutons un nombre m (d'enveloppes) ; au nombre b, ajoutons le même nombre m (de timbres-poste). Nous obtenons la nouvelle égalité :

$$a + m = b + m \quad \text{(quelle que soit la valeur de } m\text{).} \qquad (2)$$

Si, aux deux membres d'une égalité, on ajoute un même nombre, on obtient une nouvelle égalité.

Autrement dit, l'égalité (1) entraîne l'égalité (2) ; l'égalité (2) entraîne de même l'égalité (1) ; ce qui s'écrit :

$$a = b \iff a + m = b + m$$

2° **L'addition et les inégalités.** — Considérons deux nombres inégaux tels que :

$$a < b. \qquad (1)$$

Dans la suite naturelle des nombres, b est placé après a et :

$$b = a + d \quad (d \text{ est différent de zéro, ce qui s'écrit : } d \neq 0).$$

Ajoutons un même nombre m aux deux membres de cette égalité :

$$b + m = (a + d) + m$$

ou :

$$b + m = (a + m) + d.$$

Comme $d \neq 0$,

$$a + m < b + m. \qquad (2)$$

Si, aux deux membres d'une inégalité, on ajoute un même nombre, on obtient une nouvelle inégalité de même sens.

L'inégalité (1) entraîne l'inégalité (2) ; l'inégalité (2) entraîne de même l'inégalité (1), ce qui s'écrit :

$$a < b \iff a + m < b + m.$$

EXERCICES

Calculer de deux façons différentes :

25. $53 + (24 + 3)$ $\qquad 47 + (15 + 2 + 6)$.

26. $24 + (35 + 25)$ $\qquad 316 + (246 + 375 + 825)$.

27. $(350 + 425) + (515 + 310)$ $\qquad (94 + 73) + (82 + 24 + 31)$.

Calculer :

28. $25 + (a + 8)$ $\qquad 12 + (5 + a + 6)$.

29. $375 + (125 + x)$ $\qquad 48 + (8 + a + b)$.

30. $54 + (x + 12 + y)$ $\qquad 26 + (b + 24 + c + 5)$.

31. On augmente de 5 les trois termes d'une somme. De combien la somme augmente-t-elle ?

32. Évaluer la somme de trois nombres entiers consécutifs en fonction du plus petit. Trouver trois nombres consécutifs dont la somme est 384.

33. Combien y a-t-il de couples de nombres entiers dont la somme est 14? dont la somme est 15? dont la somme est un nombre n? (On considère, pour la première somme, les couples 9 et 5 et 5 et 9 comme distincts.)

34. On donne trois nombres a, b, c. On augmente a de 1, b de 4, c de 7. De combien augmente la somme S des trois nombres?

35. Même exercice quand on augmente a de 5, b de 10, c de x.

36. Écrire la somme des nombres a, b, c de toutes les façons possibles en changeant seulement l'ordre des termes. Combien de façons sont possibles?

37. Même exercice pour a, b, c, d.

38. Pour avoir le 4ᵉ nombre, le 7ᵉ nombre d'une suite de nombres impairs, combien de fois faut-il ajouter 2 au premier nombre impair? Calculer directement le 50ᵉ nombre impair de cette suite.

39. En appliquant la propriété associative des sommes, écrire de toutes les manières possibles les sommes $m + n + p$ et $m + n + p + q$.

40. On donne la somme $9 + a$. Le nombre a étant inférieur à 6, appliquer la propriété distributive des sommes en remplaçant a par la somme de deux nombres entiers. Nombre de solutions?

3. MULTIPLICATION. PRODUIT

1. Produit de deux nombres.

La *somme* 15 + 15 + 15 + 15 présente la caractéristique d'avoir *tous ses termes égaux entre eux*.

On simplifie son écriture en indiquant simplement la *valeur commune* de tous les termes et le *nombre* de termes. On note alors la somme 15 + 15 + 15 + 15 sous la forme :

$$15 \times 4,$$

et on lit : « *15 multiplié par 4* ».

De même la somme : $a + a + a$, s'écrit $a \times 3$.

Plus généralement :

***Le produit d'un nombre** a **par un nombre** b **est la somme de** b **nombres égaux à** a.*

Il s'écrit : $a \times b$. Dans ce produit :

a est un *terme* de la somme : on l'appelle le ***multiplicande.***
b est le *nombre de termes* de la somme : on l'appelle le ***multiplicateur.***

La multiplication est l'opération qui permet de calculer le produit de deux nombres.

On dit que le produit est un *multiple* du multiplicande. Par exemple, 60 est un multiple de 15, parce 60 = 15 × 4.

2. Propriété fondamentale du produit de deux nombres.

La carte de boutons ci-contre (fig. 1) contient 4 rangées de 5 boutons (ou 4 fois 5 boutons), soit un nombre de boutons égal à :

$$5 \times 4.$$

Si l'on compte le même ensemble de boutons par colonnes, on constate que la carte contient 5 colonnes de 4 boutons (ou 5 fois 4 boutons), soit un nombre de boutons égal à :

$$4 \times 5.$$

Donc :

$$5 \times 4 = 4 \times 5.$$

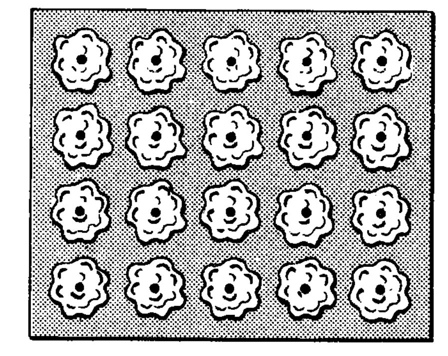


Fig. 1. — Cette carte contient : 4 rangées de 5 boutons ou 5 colonnes de 4 boutons.

Le produit de deux nombres ne dépend pas de l'ordre de ces nombres.

D'une manière générale :

$$\boxed{a \times b = b \times a}$$

a et b sont les *facteurs* du produit. Puisque les facteurs d'un produit peuvent être intervertis, ***la multiplication est une opération commutative.***

REMARQUES :

1° $1 \times a = a$, 1 est ***élément neutre*** pour la multiplication | $0 \times a = 0$ et $a \times 0 = 0$. quel que soit a.

2° Le produit des ***facteurs littéraux*** $a \times b$ s'écrit aussi $a \,.\, b$ ou ab.
Mais le produit d'un facteur littéral par un nombre arithmétique, par exemple le produit de a par 7, s'écrit : $a \times 7$ ou $7\,a$ (et non $a \,.\, 7$).

3° Dans un produit de deux facteurs, le multiplicateur indique l'opération à faire sur le multiplicande : addition d'***autant de termes égaux au multiplicande*** qu'il y a d'***unités*** dans le multiplicateur. On dit que ***le multiplicateur est un opérateur.***

3. Produit de plusieurs facteurs.

Multiplions 3 par 7; nous obtenons 21; puis 21 par 5, le résultat est 105. Le nombre 105 peut être représenté par le produit : $3 \times 7 \times 5$.

Le produit de plusieurs facteurs est le résultat obtenu en multipliant le premier facteur par le second, le produit obtenu par le troisième... et ainsi de suite jusqu'à épuisement des facteurs.

Ainsi :

$$8 \times 3 \times 5 \times 11 = 24 \times 5 \times 11 = 120 \times 11 = 1\,320.$$

$$\boxed{a \times b \times c \times d = (a \times b) \times c \times d = (a \times b \times c) \times d}$$

NOTATION. — Remarquer que le produit $a \times b \times c \times d$ peut s'écrire $a \,.\, b \,.\, c \,.\, d$ ou $abcd$.

4. Propriété commutative du produit de plusieurs facteurs.

1° Calculons le prix de la carte de boutons (fig. 1), chaque bouton valant 3 F.
Comptons par rangées : le prix d'une rangée est, en francs : 3×5, et le prix de 4 rangées : $3 \times 5 \times 4$.
Comptons par colonnes : le prix d'une colonne étant, en francs : 3×4, les 5 colonnes valent : $3 \times 4 \times 5$.

Donc : $$3 \times 5 \times 4 = 3 \times 4 \times 5$$

ou : $$\boxed{a \times b \times c = a \times c \times b}$$

Dans un produit de trois facteurs, on peut intervertir l'ordre des deux derniers.

2° Considérons le produit : $7 \times 3 \times 5 \times 4$. De la définition d'un produit, il résulte qu'il est égal à : $(7 \times 3) \times 5 \times 4$. Il représente alors un produit de trois facteurs dans lequel on peut intervertir l'ordre des deux derniers :

$$(7 \times 3) \times 5 \times 4 = (7 \times 3) \times 4 \times 5.$$

Donc : $7 \times 3 \times 5 \times 4 = 7 \times 3 \times 4 \times 5.$

$$a \times b \times c \times d = a \times b \times d \times c$$

Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut intervertir l'ordre des deux derniers.

3° Puisque : $7 \times 3 \times 5 \times 4 = 7 \times 3 \times 4 \times 5,$

on en déduit que :

$$(7 \times 3 \times 5 \times 4) \times 2 = (7 \times 3 \times 4 \times 5) \times 2.$$

Donc : $7 \times 3 \times 5 \times 4 \times 2 = 7 \times 3 \times 4 \times 5 \times 2.$

$$a \times b \times c \times d \times e = a \times b \times d \times c \times e$$

Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut intervertir l'ordre de deux facteurs consécutifs.

4° Considérons les deux facteurs 7 et 5 du produit : $7 \times 3 \times 5 \times 4$. En permutant plusieurs fois deux facteurs consécutifs, comme il est indiqué ci-après, on obtient :

$$7 \times 3 \times 5 \times 4 = 3 \times 7 \times 5 \times 4 = 3 \times 5 \times 7 \times 4 = 5 \times 3 \times 7 \times 4.$$

$$a \times b \times c \times d \times e = b \times d \times e \times c \times a$$

Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut intervertir d'une manière quelconque l'ordre des facteurs.

Lorsqu'un produit de facteurs est entièrement *littéral*, on écrit les lettres dans l'ordre alphabétique.

EXEMPLES : abx ; xyz.

Mais lorsqu'il est formé de nombres et de lettres, on écrit les nombres *avant* les lettres.

EXEMPLES : $2 \times 5 \times a \times b$; $7ab$.

5. Propriété associative du produit de plusieurs facteurs.

Considérons le produit : $7 \times 3 \times 5 \times 4$.
Il peut s'écrire, en changeant l'ordre des facteurs : $3 \times 4 \times 7 \times 5$.
Effectuons le produit des trois premiers facteurs (§ 3) : nous pouvons écrire le produit considéré sous la forme : $(3 \times 4 \times 7) \times 5$.

Donc : $7 \times 3 \times 5 \times 4 = (3 \times 4 \times 7) \times 5.$

$$a \times b \times c \times d = (c \times d \times a) \times b$$

Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut remplacer deux ou plusieurs d'entre eux par leur produit effectué.

6. Applications de la propriété associative.

1° Pour multiplier un produit de facteurs par un nombre, on peut multiplier L'UN DES FACTEURS par ce nombre en conservant les autres facteurs.

En effet :

$(7 \times 5 \times 8) \times 2 = 7 \times 5 \times 8 \times 2 = 7 \times 5 \times 2 \times 8$ (propriété commutative)
$= 7 \times 10 \times 8$ (propriété associative).

L'opération revient à supprimer les parenthèses et à remplacer deux facteurs par leur produit effectué.

De même : $5\,ab \times 9 = 45\,ab$.

2° Pour multiplier un nombre par un produit de facteurs, on peut former un produit comprenant à la fois le nombre et les facteurs donnés, puis, si on le désire, remplacer dans ce produit le nombre et un facteur par leur produit effectué.

En effet :

$$5 \times (4 \times 9 \times 7) = 5 \times 4 \times 9 \times 7 = 4 \times 5 \times 9 \times 7 = 4 \times 45 \times 7.$$

De même : $6 \times 7\,x = 42\,x$.

3° Pour multiplier deux produits de facteurs, on peut former un produit unique contenant tous les facteurs.

Ainsi :

$$(5 \times 3 \times 7) \times (9 \times 2) = 5 \times 3 \times 7 \times 9 \times 2.$$

On peut ensuite effectuer les multiplications dans un ordre quelconque.

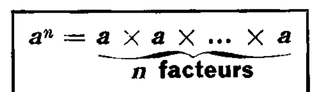
De même : $5\,x \times 3\,y \times 2\,z = 30\,xyz$.

7. Puissances.

Considérons le produit $5 \times 5 \times 5 \times 5$. Il contient 4 facteurs égaux à 5. Pour simplifier l'écriture, on peut l'écrire 5^4, expression qui se lit : *5 puissance 4*.
Le nombre 4 est l'*exposant* de la puissance, 5 en est la *base*.

Une puissance d'un nombre est le produit d'autant de facteurs égaux à ce nombre qu'il y a d'unités dans l'exposant.

$a^5 = a \times a \times a \times a \times a$



$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Certaines puissances numériques d'un nombre sont lues d'une manière particulière. Ainsi :

7^2 se lit *7 au carré*,
5^3 se lit *5 au cube*.

REMARQUES. — 1° Le *nombre de zéros* d'une puissance de 10 est égal à l'exposant de cette puissance : $10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$ (5 zéros).

2° Lorsqu'on calcule la puissance n (ou la $n^{ième}$ puissance) d'un nombre x, on dit que ***l'on élève x à la puissance n.***

3° Constatons que 5^2 et 2^5 n'ont pas la même valeur :

$5^2 = 5 \times 5 = 25$ | $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32.$

L'élévation à une puissance n'est donc pas une opération commutative.

4° Retenons que :

$0^4 = 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0$	$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$	$a^1 = a.$
$0^n = 0$	$1^n = 1$	(par convention).

5° L'opération d'élévation à une puissance est prioritaire par rapport aux sommes, différences, produits, sauf si ces sommes, différences, produits sont entre parenthèses.

EXEMPLES : $8 + 5^2 = 8 + 25 = 33$; $8 \times 5^2 = 8 \times 25 = 200.$
Mais : $(8 + 5)^2 = 13^2 = 169$; $(8 \times 5)^2 = 40^2 = 1\,600.$

8. Produit de puissances de même base.

Calculons : $5^3 \times 5^4$.

$$5^3 \times 5^4 = (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5) = 5^7.$$

$$a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$$

Pour multiplier plusieurs puissances d'une même base, on affecte cette base d'un exposant égal à la somme des exposants des puissances.

L'élévation à une puissance est distributive par rapport à la multiplication.

APPLICATIONS.

a) ***Produit de plusieurs puissances littérales d'une même base :***

$x^7 \times x^2 = x^9$ | $a^2 \times a^5 \times a = a^{2+5+1} = a^8.$

b) ***Produit de facteurs donnés sous forme de puissances :***

$$(2^5 \times 5 \times 11^3) \times (2^3 \times 5^4 \times 11) = 2^8 \times 5^5 \times 11^4$$
$$(a^4 \times 3\,b) \times (a^3 \times b^2) = a^7 \times 3\,b^3 = 3\,a^7\,b^3.$$

9. Élévation d'une puissance d'une base à une autre puissance.

Élevons, par exemple, 5^3 au carré.

$$(5^3)^2 = 5^3 \times 5^3 = 5^{3+3} = 5^{3\times 2} = 5^6.$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Pour élever une puissance d'une base à une puissance, on conserve la base et on l'affecte d'un exposant égal au produit des exposants donnés.

EXEMPLES :

$(7^2)^3 = 7^6$ | $(a^4)^2 = a^8.$

$$(a^2 \times b \times c^3)^2 = a^4 \times b^2 \times c^6.$$

EXERCICES

41. Calculer les produits :

$5 \times 3 \times a$ $17 \times b \times 5$ $7 \times a \times y \times 8$
$18 \times 5 \times x$ $8 \times 12 \times y$ $8 \times x \times a \times 15$

42. Effectuer, de trois manières différentes, chacun des produits suivants :

$(5 \times 2) \times 3$ $(7 \times 5) \times 2$ $(6 \times 3) \times 5$
$7 \times (6 \times 2)$ $8 \times (3 \times 4)$ $9 \times (2 \times 7)$

43. Effectuer, de quatre manières différentes, chacun des produits suivants :

$(7 \times 3 \times 8) \times 5$ $(11 \times 19 \times 2) \times 7$ $(8 \times 12 \times 2) \times 11$
$9 \times (4 \times 7 \times 3)$ $8 \times (2 \times 3 \times 9)$ $9 \times (3 \times 5 \times 3)$

44. Effectuer les produits suivants :

$(6 \times 9 \times 5) \times (7 \times 2)$ $(5 \times 7 \times 3) \times (8 \times 2)$

Calculer :

45. $7a \times 5$ $3x \times 19$ $11y \times 7$ $38b \times 5$

46. $99 \times 7x$ $21 \times 8a$ $28 \times 15b$ $24 \times 9y$

47. $5a \times 3b$ $20x \times 16y$ $49x \times 11y$ $14a \times 14b$

48. Calculer la valeur numérique de l'expression $2\pi R \times h$ pour $\pi = 3{,}14$; $R = 15$; $h = 42$.

49. Calculer le volume d'un parallélipipède rectangle dont les arêtes mesurent $2a$, b, $3c$. Quelle est la valeur numérique du volume en centimètres cubes pour : $a = 4$ *cm*, $b = 5$ *cm*, $c = 3$ *cm* ?

50. Que devient le produit 7×5 quand on multiplie le multiplicande par 4 ? un facteur par n ?

51. Une famille de 5 personnes va au cinéma 4 fois par mois. Chaque place coûte 3 F. Trouver la dépense annuelle. Il y a plusieurs façons de résoudre ce problème. Indiquer la méthode qui correspond à chacune des réponses suivantes :

$3 \times 5 \times 4 \times 12$
$3 \times 4 \times 12 \times 5$
$3 \times (4 \times 12 \times 5)$
$3 \times 5 \times (4 \times 12)$

52. Que devient la surface d'un rectangle lorsqu'on triple sa longueur et double sa largeur ?

53. Que devient le volume d'un parallélipipède rectangle ayant a, b, c pour dimensions lorsqu'on quintuple sa longueur, triple sa largeur, double sa hauteur ?

54. On veut rendre 6 fois plus grand le volume d'un parallélipipède rectangle dont les dimensions sont a, b, c. Comment faire ? (Il y a plusieurs solutions.)

55. Remplacer chacun des produits ci-dessous par un produit de cinq facteurs (autres que 1) :

$3 \times 5 \times 11 \times 14$
$7 \times 6 \times 55$
$5 \times 22 \times 21$
30×91

56. Calculer $10\,000 \times 100$ et $100\,000 \times 1\,000$. Combien de chiffres peut avoir le produit d'un nombre entier de 5 chiffres par un nombre entier de 3 chiffres ?

Puissances.

Calculer :

57. 149^2 27^3 15^4 226^2 131^2 20^4 35^3.

58. $7^3 \times 7^4$ $5^2 \times 5^3 \times 5^4$ $a^2 \times a^5$ $b^3 \times b^7 \times b^2$.

59. $(2^4 \times 3^5 \times 7) \times (2^3 \times 3^2 \times 7^3)$ $(3 \times 5^2 \times 9) \times (3^4 \times 5 \times 9^3)$.

60. $(a^2 \times b^3 \times c) \times (a^2 \times b \times c^4)$ $(x^3 \times y^5 \times z^2) \times (x^2 \times z^4)$.

61. $2\,a^2b^3 \times 7\,ab^4$ $3\,ab^3c^2 \times 2\,a^2bc$ $12\,a^2b^3c^4 \times 5\,a^4b^3c^2$ $21\,ax^2y \times 4\,a$.

62. $12\,a^2b^3c^4 \times 6\,ab^2c^2$ $30\,x^4y^3c^2 \times 15\,x^3y^3c$ $4\,x^2y \times 2\,xy^2 \times 5\,xy$.

63. $(4^2)^3$ $(a^3)^5$ $[2^2 \times 3 \times 5^4]^2$ $(a^3bc)^2$ $(5\,a^2b^2c)^3$.

64. Pour $a = 5$, calculer $2\,a$ et a^2.

65. On donne $5^6 = 15\,625$. Calculer 5^7, puis 5^9.

66. Montrer que, lorsque l'on multiplie par 4 le côté d'un carré, la surface de ce carré est multipliée par 16.

67. Montrer que, lorsque l'on multiplie par 2 l'arête d'un cube, le volume de ce cube est multiplié par 8.

68. Écrire la formule donnant la surface du cercle. Doubler le rayon. Que devient la surface ?

69. Que devient le produit 7×5 lorsqu'on multiplie les deux facteurs par 4 ? les deux facteurs par n ?

70. Calculer 2^6 et 4^3. Pouvait-on prévoir l'égalité des deux résultats ?

71. Calculer 3^{12}, 9^6, 27^4. Justifier l'égalité de ces trois résultats.

72. Soient $A = 2^2 \times 3 \times 5^2$ et $B = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Écrire sous la forme d'un produit de facteurs : le double de A, le triple de B, le produit de A par B.

73. Soient $A = 3\,x$ et $B = 2\,ax^2$. Écrire le double de A, le triple de B, le double du produit de A par B.

74. Comparer les trois expressions : $A = (5^3)^2$ $B = (5^2)^3$ $C = 5^2 \times 5^3$.

4. SUITES D'ADDITIONS ET DE MULTIPLICATIONS. USAGE DES PARENTHÈSES

1. Convention relative à l'écriture des parenthèses.

Nous savons déjà que lorsqu'une somme ou un produit sont écrits entre parenthèses, la somme ou le produit doivent être considérés comme effectués.

Autrement dit, les opérations indiquées entre parenthèses doivent être effectuées *avant les autres,*

Par exemple :

$$5 \times (2 \times 3) = 5 \times 6 = 30.$$

2. Écriture d'une suite d'additions et de multiplications.

PROBLÈME 1. — *Marc possédait 8 F. Il a reçu, pour chacune des trois compositions qu'il a réussies dans le mois, 2 F. Combien possède-t-il alors ?.*

Marc a reçu pour les trois compositions : (2 × 3) F ou **6 F.**

Il possède alors :

$$8\ F + 2\ F \times 3 = 8\ F + 6\ F = \mathbf{14\ F.}$$

On convient d'écrire, *sans parenthèses,* la somme $8 + 2 \times 3$.

L'expression $a + b \times c$ signifie que l'on ajoute le produit $b \times c$ au nombre a.

La multiplication doit être effectuée avant l'addition lorsque la suite d'opérations ne comporte pas de parenthèses.

PROBLÈME 2. — *Eric a travaillé 2 jours avec son père qui lui a donné pour le récompenser 8 F par jour. Le grand-père a ajouté 3 F. Combien Eric a-t-il reçu ?*

Eric a reçu de son père :

$$8\ F \times 2 \text{ ou } 16\ F,$$

soit en tout, de son père et de son grand-père :

$$8\ F \times 2 + 3\ F = 16\ F + 3\ F = \mathbf{19\ F.}$$

On convient d'écrire *sans parenthèses,* la somme $8 \times 2 + 3$.

L'expression $a \times b + c$ signifie qu'au produit $a \times b$, on ajoute c.

Comme dans l'exemple 1, ***on effectue la multiplication avant l'addition.***

PROBLÈME 3. — *Un employé dépense par jour de travail 8 F pour son déjeuner et 2 F de transport. Combien dépense-t-il pour 3 jours de travail ?*

La dépense est, par jour, de :

$$8\ F + 2\ F = 10\ F,$$

et pour 3 jours :

$$(8\ F + 2\ F) \times 3 = 10\ F \times 3 = \mathbf{30\ F.}$$

On convient d'écrire les opérations sous la forme : $(8 + 2) \times 3$, en prenant soin d'écrire la somme *entre parenthèses.*

Si l'on oubliait les parenthèses et si l'on écrivait $8 + 2 \times 3$, on obtiendrait (problème 1) un résultat égal à $8 + 6 = 14$, différent du résultat cherché qui est 30.

L'expression $(a + b) \times c$ signifie que l'on multiplie la somme $a + b$ par le nombre c.

L'addition notée entre parenthèses est ainsi effectuée avant la multiplication.

PROBLÈME 4. — *Un commerçant a vendu un lundi 2 objets qui coûtent chacun 8 F et le lendemain 3 objets identiques. Combien a-t-il reçu ?*

Le commerçant ayant vendu $2 + 3$, ou 5 objets, a reçu :

$$8 \text{ F} \times (2 + 3) = 8 \text{ F} \times 5 = \mathbf{40} \textbf{ F}.$$

On convient d'écrire les opérations sur la forme $8 \times (2 + 3)$.

Si l'on oubliait les parenthèses, on écrirait $8 \times 2 + 3$, expression dont la valeur serait égale (exemple 2) à 19, et non à 40.

L'expression $a \times (b + c)$ signifie que l'on multiplie le nombre a par la somme $(b + c)$.

L'addition notée entre parenthèses est ainsi effectuée avant la multiplication.

3. Convention.

Dans une suite d'additions et de multiplications, les opérations doivent être effectuées dans l'ordre suivant :

a) ***opérations indiquées dans les parenthèses ;***
b) ***multiplications indiquées hors des parenthèses ;***
c) ***additions indiquées hors des parenthèses.***

4. Combinaisons d'additions et de multiplications.

EXEMPLE 1. $S_1 = (7 + 3) \times 2 + 5.$

Calculons la somme entre parenthèses : $7 + 3$ ou 10. Multiplions 10 par 2, ce qui donne 20, puis à ce résultat ajoutons 5. Nous trouvons la valeur de S_1, qui est **25**.

S_1 est ainsi la somme de deux termes, le premier de ces termes étant un produit.

EXEMPLE 2. $S_2 = 7 + 3 \times (2 + 5).$

Calculons la somme entre parenthèses : $2 + 5$, ou 7. Multiplions 7 par 3, ce qui donne 21, puis ajoutons 7. Nous obtenons : $S_2 = \mathbf{28}$.

S_2 est encore la somme de deux termes (mais différents de ceux de l'exemple 1), le second de ces termes étant un produit.

EXEMPLE 3. $S_3 = 7 + 3 \times 2 + 5.$

Puisque l'expression est écrite sans parenthèses, calculons d'abord le résultat de la multiplication qui est 6, puis celui de l'addition des trois termes 7, 6 et 5. Nous trouvons **18**.

S_3 est la somme de trois termes, dont le second est un produit.

EXEMPLE 4. $S_4 = (7 + 3) \times (2 + 5)$.

Calculons d'abord les deux sommes : nous obtenons 10 et 7. Multiplions ensuite 10 par 7. Nous trouvons **70.**

S_4 est le produit de deux sommes.

EXEMPLE 5. $S_5 = (11 + 5 \times 2) + 8 \times 3 + 15$.

S_5 est la somme de trois termes, le premier de ces termes étant égal à 11 + 10 = 21, le second à 24 et le troisième à 15.

$$S_5 = 21 + 24 + 15 = \mathbf{60}.$$

REMARQUE. — La valeur d'un nombre peut s'écrire sous la forme d'une somme de produits.

Par exemple : $8\,547 = 8 \times 1\,000 + 5 \times 100 + 4 \times 10 + 7$.

De même, le nombre de trois chiffres dont les figures de chiffres dont c pour les centaines, d pour les dizaines, u pour les unités, s'écrit :

$$c \times 100 + d \times 10 + u.$$

EXERCICES

Calculer :

75. 5 × 3 + 2	5 + 3 × 2	(5 + 3) × 2	5 × (3 + 2)
76. 7 × 2 + 5	7 × (2 + 5)	7 + (2 × 5)	(7 + 2) × 5
77. (4 + 3) × 5	4 + 3 × 5	4 × 3 + 5	4 × (3 + 5)

Calculer :

78. (3 + 5) × 7 + 4	3 + 5 × 7 + 4	3 + 5 × (7 + 4)	(3 + 5) × (7 + 4)
79. (5 + 1) × 3 + 2	5 + 1 × 3 + 2	5 + 1 × (3 + 2)	(5 + 1) × (3 + 2)

Effectuer les calculs suivants :

80. 20 + 5 × 4 + 3 × 2 — 20 + 5 × (4 + 3) × 2
(20 + 5) × 4 + 3 × 2 — (20 + 5) × (4 + 3) × 2

81. 7 + 5 × 3 + 2 — 7 + 5 × (3 + 2)
(7 + 5) × 3 + 2 — (7 + 5 × 3) + 2
7 + (5 × 3) + 2 — 7 + (5 × 3 + 2)

82. 50 + 5 × 3 + 7 × (8 + 2) — (50 + 5) × 3 + 7 × 8 + 2

83. 15 + 7 + 2 × (5 + 3) + 5 — (15 + 7) + 2 × 5 + 3 + 5

84. Entre les nombres de un chiffre : 5 3 7 2, on place soit le signe +, soit le signe × (les trois signes pouvant être les mêmes). Après avoir écrit les expressions correspondantes, calculer leurs valeurs.

5. PRODUITS DE SOMMES

1. Produit d'une somme par un nombre.

1° La somme ne comporte que deux termes.

PROBLÈME. — *Trois amies achètent chacune 2 disques « grand format » et 5 disques « petit format ». Combien de disques ont-elles acheté ?*

Nous pouvons calculer de deux façons le nombre de disques demandé.

a) Chaque personne achetant 2 + 5 (ou 7 disques), les trois amies ont acheté un nombre de disques égal à : $(2 + 5) \times 3$.

b) Les trois amies ont acheté :

— des disques « grand format » au nombre de 2×3 (ou 6),
— des disques « petit format » au nombre de 5×3 (ou 15),
soit un nombre total de disques égal à :

$$2 \times 3 + 5 \times 3.$$

Le nombre de disques étant le même dans les deux cas, nous pouvons écrire :

$$(2 + 5) \times 3 = 2 \times 3 + 5 \times 3.$$

$$\boxed{(a + b) \times m = a \times m + b \times m} \qquad (1)$$

2° La somme comporte plusieurs termes. Calculons le produit par m de la somme $a + b + c$. Cette somme peut-être considérée comme composée du terme $(a + b)$ et du terme c. Donc :

$$(a + b + c) \times m = [(a + b) + c] \times m$$
$$= (a + b) \times m + c \times m = a \times m + b \times m + c \times m.$$

$$\boxed{(a + b + c) \times m = a \times m + b \times m + c \times m} \qquad (2)$$

Pour multiplier une somme de plusieurs termes par un nombre, on peut multiplier chaque terme de la somme par ce nombre, puis ajouter entre eux les produits obtenus.

EXEMPLE : $(5 + 8 + 3) \times 2 = 5 \times 2 + 8 \times 2 + 3 \times 2.$

Rappelons que, dans la somme de produits constituant le second membre de l'égalité, les multiplications s'effectuent avant les additions. Donc :

$$(5 + 8 + 3) \times 2 = 10 + 16 + 6 = \mathbf{32}.$$

2. Produit d'un nombre par une somme.

EXEMPLE : $m \times (a + b + c).$

La multiplication étant une opération commutative :

$$m \times (a + b + c) = (a + b + c) \times m.$$

$$\boxed{m \times (a + b + c) = a \times m + b \times m + c \times m} \qquad (3)$$

Pour multiplier un nombre par une somme de plusieurs termes, on peut multiplier le nombre par chaque terme de la somme, puis ajouter entre eux les produits obtenus.

EXEMPLE : $7 \times (3 + 9 + 2) = 7 \times 3 + 7 \times 9 + 7 \times 2 = 21 + 63 + 14 = \mathbf{98}$.

REMARQUE. — En remplaçant le produit d'une somme par un nombre (ou le produit d'un nombre par une somme) par une somme de produits, nous avons ***développé le produit donné.***

3. Applications.

1° Au calcul mental.

a) *Multiplication d'un nombre quelconque par un nombre d'un seul chiffre.*

Exemple : 683×5. En remarquant que $683 = 600 + 80 + 3$, on peut opérer ainsi : 5 fois 600, 3 000 ; 5 fois 80, 400 ; 5 fois 3, 15. Total : 3 415.

b) *Multiplication par 11, 21, 31 ..., 101.*

Remarquons que : $11 = 10 + 1$; ... $101 = 100 + 1$.

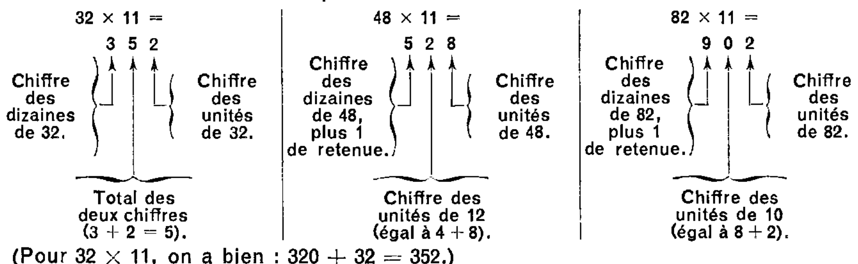
Pour calculer, par exemple, 32×11, nous dirons : 10 fois 32, 320, puis $320 + 32 = 352$.

Pour multiplier un nombre par 11, 21, 31, ..., 101, on multiplie ce nombre par 10, 20, 30, ..., 100, puis on l'ajoute au produit obtenu.

EXEMPLES :

$52 \times 11 = 520 + 52 = 572$. $84 \times 31 = 2\,520 + 84 = 2\,604$.

Les exemples suivants montrent comment on peut écrire rapidement le produit d'un nombre de deux chiffres par 11 :



(Pour 32×11, on a bien : $320 + 32 = 352$.)

2° Au calcul littéral.

$(x + 5) \times 3 = 3x + 15$

$(8 + 3) \times x = 8x + 3x$

$7 \times (a + 4 + 1) = 7a + 28 + 7 = 7a + 35$

$2 \times (3a + b + 9) = 6a + 2b + 18$.

4. Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

L'égalité $(a + b + c) \times m = a \times m + b \times m + c \times m$, montre que la multiplication par m, applicable à la somme effectuée $a + b + c$, peut être distribuée à chacun des termes a, b, c de cette somme, avant de faire l'addition.

La multiplication est distributive par rapport à l'addition. Cette propriété est très fréquemment utilisée dans le calcul littéral.

5. Mise en facteur.

Écrivons l'égalité (3) de la page 27 sous la forme :

$$am + bm + cm = m \times (a + b + c)$$

Chacun des termes de la somme écrite dans le premier membre de l'égalité est le produit de m par un autre nombre entier, c'est-à-dire un multiple de m.

Lorsque tous les termes d'une somme sont multiples d'un même nombre, on peut écrire cette somme sous la forme *du produit d'une nouvelle somme par ce nombre*. C'est ce produit qu'exprime le second membre de l'égalité ci-dessus.

On dit que, dans la somme indiquée, *on a mis* m *en facteur.*

EXEMPLES. — 1° $32 + 24 + 18$.

Les termes de cette somme sont respectivement les produits de 2 par 16, 12, 9. La somme peut donc être écrite :

$$32 + 24 + 18 = 2 \times (16 + 12 + 9).$$

2° $21\,a + 14\,b + 7$.

Les termes de la somme sont respectivement les produits de 7 par $3\,a$, $2\,b$ et 1. Donc :

$$21\,a + 14\,b + 7 = 7 \times (3\,a + 2\,b + 1).$$

APPLICATION. — Considérons la somme $5\,x + 6\,x + x$. Nous pouvons mettre x en facteur. Donc :

$$5\,x + 6\,x + x = x \times (5 + 6 + 1) = x \times 12 = 12\,x.$$

Nous rencontrerons souvent cette simplification dans les calculs littéraux.

De même : $7\,x + 5 + 11\,x + 3 = 18\,x + 8$.

REMARQUE. — On appelle *produits semblables* (ou termes semblables) des produits qui ont la même partie littérale.

EXEMPLES : $5\,x$, $6\,x$ et x ; $3\,ab$ et $5\,ab$; $2\,a^2$ et $7\,a^2$.

6. Produit d'une somme par une somme.

Voici le produit de la somme de deux nombres par la somme de deux autres nombres : $(a + b) \times (c + d)$. Considérons la somme $(c + d)$ comme effectuée. Nous sommes ramenés au cas du produit d'une somme par le nombre $(c + d)$:

$$\begin{aligned}(a + b) \times (c + d) &= a \times (c + d) + b \times (c + d)\\ &= a \times c + a \times d + b \times c + b \times d\end{aligned}$$

$$\boxed{(a + b) \times (c + d) = a \times c + b \times c + a \times d + b \times d}$$

Pour multiplier une somme par une somme, on peut multiplier successivement chaque terme de la première somme par chaque terme de la seconde et ajouter entre eux les produits obtenus.

EXEMPLES :

$$(5 + 11) \times (3 + 2) = 5 \times 3 + 11 \times 3 + 5 \times 2 + 11 \times 2 = 15 + 33 + 10 + 22 = \mathbf{80}$$

$$\begin{aligned}(3\,a + 2) \times (2\,b + 1) &= 3\,a \times 2\,b + 2 \times 2\,b + 3\,a \times 1 + 2 \times 1\\ &= \boldsymbol{6\,ab + 4\,b + 3\,a + 2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(8 + 5 + 1) \times (7 + 4) &= 8 \times 7 + 5 \times 7 + 1 \times 7 + 8 \times 4 + 5 \times 4 + 1 \times 4\\ &= 56 + 35 + 7 + 32 + 20 + 4 = \mathbf{154}.\end{aligned}$$

$$(a + b)^2 = (a + b) \times (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = \boldsymbol{a^2 + 2\,ab + b^2}.$$

EXERCICES

Effectuer les calculs suivants en appliquant les règles indiquées dans la leçon, puis vérifier en calculant d'abord les expressions entre parenthèses :

85. $(9 + 5) \times 4$ $(8 + 3 + 7) \times 5$ $(15 + 21 + 9) \times 11$.

86. $(25 + 7) \times 9$ $(35 + 25 + 18) \times 19$ $(18 + 17 + 16) \times 21$.

87. $31 \times (12 + 17)$ $51 \times (24 + 15)$ $61 \times (12 + 25 + 35)$.

88. $11 \times (9 + 7)$ $101 \times (18 + 15)$ $15 \times (17 + 9 + 16)$.

Expliquer comment on peut calculer mentalement les produits suivants (transformer un des facteurs en une somme) :

89. 12×31 58×11 42×21 18×101.

90. 23×11 37×21 52×31 $24 \times 1\,001$.

Effectuer les produits suivants :

91. $(x + 4) \times 7$ $(y + 5) \times 6$ $(7 + a + b) \times 8$.

92. $(m + 8) \times 5$ $(10 + 5 + x) \times 7$ $(9 + a + 2) \times 3$.

93. $2 \times (a + 1)$ $9 \times (x + 4)$ $14 \times (m + 3 + 5)$.

94. $7 \times (a + b)$ $8 \times (a + 11 + x)$ $15 \times (7 + x + y)$.

Effectuer les produits suivants :

95. $(5 + 3) \times (7 + 4)$ $(19 + 3 + 8) \times (5 + 2)$.

96. $(x + 5) \times (x + 3)$ $(x + 7 + y) \times (x + a)$.

Calculer :

97. $15 + x \times 8 + y$ $(15 + x) \times (8 + y)$.
$15 + x \times (8 + y)$ $(15 + x) \times 8 + y$.

Trouver les valeurs numériques de ces expressions pour $x = 5$, $y = 2$.

98. On considère un nombre x. On lui ajoute 3. On double le total. Écrire l'expression qui correspond au résultat.

99. Que devient le produit 24×15 quand on augmente de 2 unités le multiplicande?

100. Que devient le produit 24×15 quand on augmente de 3 unités le multiplicateur?

101. Le produit de deux nombres est 48. On ajoute 3 au multiplicateur. Le produit devient 72. Trouver les deux nombres.

102. Vous avez multiplié 6 475 par 18. Or vous deviez multiplier 6 485 par 18. Trouver le second résultat sans faire la multiplication de 6 485 par 18.

103. Que devient le produit de a par b quand on augmente de 2 unités le multiplicande et de 3 unités le multiplicateur?

104. On augmente de 5 les deux facteurs du produit $a \times b$. Ce produit augmente de 100. Trouver a et b sachant que leur différence est 3.

105. Un terrain rectangulaire a x mètres de large. Sa longueur a 15 m de plus. Écrire l'expression qui donne sa surface.

106. Soit un nombre x. On le multiplie par 3. On ajoute 5 au produit obtenu. On multiplie le total par 2. Écrire l'expression du résultat sous la forme d'une somme de deux termes.

107. Calculer :

$$16 + (8 + 3) \times (7 + 5) + 10 \times 2 + 1$$
$$(7 + 2) \times (5 + 3) + (6 + 1) \times (8 + 7).$$

108. Calculer mentalement :

$4 \times 9 + 7 \times 9$ $\quad$ $53 \times 8 + 7 \times 8$
$36 \times 7 + 14 \times 7$ $\quad$ $12 \times 9 + 18 \times 9$
$5 \times 19 + 15 \times 19$ $\quad$ $18 \times 21 + 2 \times 21.$

109. Mettre chacune des sommes suivantes sous la forme d'un produit de deux facteurs :

$60 \times 15 + 61 \times 15$ $\quad$ $12 \times 8 + 7 \times 12 + 11 \times 12$
$7 \times 5 + 5 \times 9 + 8 \times 5$ $\quad$ $16 \times 3 + 16 \times 21 + 16 \times 6.$

110. Transformer les sommes suivantes en produits de facteurs :

$22 + 26 + 4$ $\quad$ $18 + 24 + 16$ $\quad$ (facteur commun : 2)
$35 + 25 + 45$ $\quad$ $75 + 25 + 45$ $\quad$ (facteur commun : 5)
$18 + 21 + 3 \times 4$ $\quad$ $36 + 24 + 5 \times 12$ $\quad$ $15 + 6 \times 7 \times 3$
$5 \times 6 + a \times 6 + 12$ $\quad$ $7 \times 10 + 3 \times 5 + 35$ $\quad$ $x \times 4 + y \times 4 + 12$
$ax + 3x$ $\quad$ $5x + 15a + 25$ $\quad$ $7x + 21a + 14$
$ax + a$ $\quad$ $a + ab + ac$ $\quad$ $8x + 6x + 10y.$

111. Effectuer les additions suivantes (après avoir effectué pour chacune une mise en facteur commun) :

$30x + 15x$ $\quad$ $8a + 20a + 5a$ $\quad$ $15y + 7y + y$
$28a + 16a$ $\quad$ $17x + 8x + 9x$ $\quad$ $40b + 2b + 98b.$

112. Réduire les termes semblables dans les sommes suivantes :

$25x + 35 + 17x + 14 + 2x$ $\quad$ $18a + 24a + 12 + a + 5$
$12x + 8 + 15x + 2 + 7$ $\quad$ $a + 15a + 7 + 8 + a.$

113. Effectuer les opérations indiquées, puis réduire les termes semblables :

$(8x + 5) \times 3 + (7x + 1) \times 2$ $\quad$ $(4x + 3) \times 5 + 7(x + 2)$
$(5a + 2) \times 6 + (8a + 3) \times 4$ $\quad$ $7 \times (3x + 2) + 5 \times (3x + 2).$

114. Calculer :

$(a + b)^2$ $\quad$ $(a + 5)^2$ $\quad$ $(x + 7)^2.$

115. Un nombre A de deux chiffres s'écrit $10d + u$ (par exemple 74 s'écrit $10 \times 7 + 4$). Montrer que le chiffre des unités du carré de A est celui du carré de ses unités. Par quels chiffres le carré d'un nombre peut-il se terminer?

6. PRATIQUE DE L'ADDITION

1. Technique de l'addition des nombres entiers.

Cette technique repose :

1° sur la connaissance de tous les totaux possibles de deux nombres d'un seul chiffre :

2° sur les propriétés déjà étudiées des sommes.

PREMIER CAS. — ***Addition de deux nombres d'un seul chiffre.***

EXEMPLE : $8 + 3$.

On doit connaître par cœur le résultat : $8 + 3 = \mathbf{11}$.

DEUXIÈME CAS. — ***Addition de plusieurs nombres.***

EXEMPLE 1. $256 + 372$.

Appliquons les propriétés des sommes :

$$\begin{aligned} 256 + 372 &= (200 + 50 + 6) + (300 + 70 + 2) \\ &= 200 + 50 + 6 + 300 + 70 + 2 \\ &= 200 + 300 + 50 + 70 + 6 + 2 \\ &= 500 + 120 + 8 \\ &= 500 + 100 + 20 + 8 \\ &= 600 + 20 + 8 \\ 256 + 372 &= \mathbf{628}. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ \underline{372} \\ 628 \\ 1 \end{array}$$

Noter comment se forme la ***retenue*** (ici 1) dans le calcul des dizaines, retenue à ajouter aux centaines.

EXEMPLE 2. $845 + 316 + 207$.

$$\begin{array}{r} 845 \\ 316 \\ \underline{207} \\ 1\,368 \\ 1 \end{array}$$

Comme dans l'exemple précédent, additionnons les unités de même ordre, en commençant par les plus petites.

Pour cela, écrivons les nombres de manière que les unités de même ordre soient placées dans une même colonne verticale. Additionnons ces unités de même ordre et inscrivons les résultats, au-dessous du trait d'addition, sous les colonnes correspondantes.

S'il y a lieu, nous retenons 10 (ou 20, ou 30 ...) unités d'un ordre pour ajouter 1 (ou 2, ou 3 ...) unités de l'ordre immédiatement supérieur aux unités de la colonne suivante. Le total de la dernière colonne s'écrit tel qu'on le trouve.

2. Calcul mental.

Pour ajouter deux nombres :

1° On peut ajouter au grand nombre les diverses unités de l'autre, en commençant par les plus élevées.

EXEMPLE : $576 + 152$.

On dit : 676, ..., 726, ..., **728.**

2° On peut associer ou décomposer les nombres afin d'obtenir dans les additions partielles des nombres simples (en général terminés par un ou plusieurs zéros).

EXEMPLE : 45 + 56 + 65.

On dit : 65 et 45, 110 ; 110 et 56, **166.**

3. Calcul rapide écrit.

1° Longues additions verticales. — Dans la pratique du calcul, on rencontre souvent de telles additions, surtout en comptabilité et en statistique. Il est indispensable, pour éviter les erreurs, d'écrire très lisiblement les chiffres en écriture droite et de les disposer en colonnes.

Retenues →	34 24
	24 884
	10 245
	8 719
	24 837
	128
	25 600
	18 417
	4 805
	1 250
Total →	118 885

On additionne les chiffres de chaque colonne en prononçant le moins de mots possible : ainsi pour compter les unités, on se borne à dire (ou mieux à penser) :

9, 18, 25, 33, 40, 45.

On écrit 5 et on reporte 4, que l'on inscrit soit en bas de la colonne des unités, soit en haut de la colonne des dizaines.

2° Additions horizontales. — Lorsque le nombre de termes à additionner ne dépasse pas trois ou quatre, il est inutile de disposer les nombres en colonnes. On repère facilement les unités de même ordre, surtout si l'on prend la précaution de pointer les chiffres déjà additionnés.

EXEMPLE :

. . .   .
42 381 + 8 315 + 18 418 = . . 114

. . . .
42 381 + 8 315 + 18 418 = 69 114.

4. Calcul mécanographique.

Les machines à additionner comportent souvent un totalisateur constitué par une série de roues placées les unes à côté des autres ; chaque roue porte à sa périphérie les dix chiffres, de 0 à 9, également espacés.

Pour ajouter, par exemple, 3 unités simples à 5 unités simples, on fait d'abord tourner la roue d'une fraction de tour correspondant à 5 unités, on la fait ensuite tourner d'une fraction de tour correspondant à 3 unités : on lit le total, 8 (unités).

Lorsque le total d'unités dépasse 9 et atteint par exemple 15 unités (cas de 8 + 7), la roue des unités indique 5 et la roue voisine à gauche enregistre 1 dizaine : ainsi est effectué le report des dizaines. On lit alors 15.

Le dispositif d'imposition (ou de pose des nombres à additionner), le système de transmission (qui fait entrer dans le totalisateur le nombre posé), le dispositif de lecture des résultats varient avec les diverses marques de machines.

5. Preuve de l'addition.

Pour faire la preuve de l'addition, on additionne les nombres à ajouter dans un *ordre différent* de celui que l'on a utilisé dans le calcul : de bas en haut, si l'on avait d'abord compté de haut en bas.

Dans les bureaux, on recommence au moyen de la machine à calculer les additions effectuées par le procédé classique.

EXERCICES

Calcul mental. Additionner mentalement :

116. 46 + 81 — 153 + 91 — 216 + 102
39 + 82 — 128 + 71 — 822 + 901.

117. 18 + 22 — 36 + 54 — 27 + 43
47 + 63 — 94 + 76 — 31 + 89.

118. 183 + 37 — 218 + 42 — 136 + 94
46 + 224 — 53 + 347 — 67 + 113.

119. 18 + 53 + 22 — 29 + 47 + 31 — 52 + 39 + 41
485 + 242 + 335 — 625 + 253 + 275 — 831 + 245 + 365.

120. 418 + 17 + 632 — 336 + 83 + 214 — 129 + 75 + 41
131 + 288 + 132 — 185 + 287 + 143 — 126 + 37 + 314.

Calcul rapide.

121. Effectuer les totaux dans le tableau ci-dessous. Importations de café (en tonnes) :

	1re année.	2e année.	3e année.	Totaux.
Allemagne	149 310	172 627	186 206	
Belgique	49 427	51 663	56 239	
États-Unis	840 578	798 700	786 473	
France	193 243	187 422	189 612	
Italie	35 909	36 744	34 704	
Pays-Bas	41 540	29 427	46 099	
Grande-Bretagne	23 709	20 609	23 040	
Suède	48 009	47 875	47 952	
Totaux				

122. Additionner verticalement et horizontalement :

5 698 205	56 960	....
85 703	456 290	....
9 730 058	3 835 697	....
89 399 075	961 925	....
91 567	912 899	....
9 287 741	67 597	....
75 412	5 993 572	....
980 818	9 896 995	....
3 969 984	739 999	....
3 463 048	1 877 982	....
39 925 092	256 968	....
....	....	....

Exercices d'application.

123. On a commencé une addition par la gauche. Dans quel cas ne commet-on pas d'erreur? Pourquoi commence-t-on les additions par la droite?

124. Dans une addition de nombres entiers, les totaux des colonnes sont, en allant de gauche à droite (donc en faisant abstraction des retenues) : 25, 67, 34, 25. Quelle est la somme des nombres additionnés? Justifier le résultat.

125. Dans une addition verticale de nombres entiers, un élève, au lieu d'écrire le nombre 14 200, a écrit 142 (le chiffre 2 se trouvant dans la colonne des unités et les autres chiffres étant décalés de deux rangs vers la droite). Quelle est l'erreur commise? Comment, à partir du résultat erroné, peut-on trouver le résultat exact?

126. Reconstituer les additions suivantes en remplaçant chaque point par le chiffre convenable :

137	3. 5.4	2. 4.7	7 9.8	7 5.9
. . 1	1 .4.	4 .5.	57.	. 847
278	38 679	33 822	8. 85	16 .2.

127. Même exercice pour :

2.8	.55	48.	2 3.9	. 252
.4.	2.7	.17	3 28.	6 .34
6.7	35.	856	. 757	4 35.
1 656	1 376	1 5.0	8 .62	16 0.4

128. Écrire comme ci-dessous la suite des 9 premiers nombres entiers, puis la même suite dans l'ordre inverse :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	8	7	6	5	4	3	2	1

Quel est le total de chaque colonne? Comment peut-on calculer rapidement la somme des 9 premiers nombres entiers?

129. Examiner attentivement les nombres de la suite :

5 8 11 14 17 20

Comment obtient-on un nombre de la suite à partir du précédent? Comment obtient-on un nombre de la suite à partir du premier nombre et connaissant son rang? Effectuer la somme du premier et du dernier nombre, du second et de l'avant-dernier, du troisième et de l'antépénultième, etc. Que remarque-t-on? Comment peut-on calculer rapidement la somme des nombres de la suite?

130. Pour symboliser tous les nombres de un chiffre, on peut disposer de quatre perforations dans une fiche sélective. Trouver le chiffre qu'il faut affecter à chaque perforation possible pour que l'on puisse, soit avec une perforation, soit avec deux au maximum (les chiffres affectés aux perforations faites s'ajoutant), exprimer tous les nombres de 1 à 9 :

O	O	O	O
...	...	...	...

131. *a*) Calculer la somme des 9 premiers nombres entiers (cf. exercice 128).

8	.	.
.	5	.
4	.	.

b) On place chacun des 9 premiers nombres entiers dans une case du tableau ci-contre, de telle façon que la somme des nombres situés dans une même rangée ou dans une même colonne soit toujours la même et qu'elle soit égale à la somme des nombres situés sur l'une ou l'autre des diagonales.

Quelle est la somme des nombres placés sur une rangée (donc sur une colonne et une même diagonale)?

c) Compléter le tableau (appelé carré magique).

7. PRATIQUE DE LA MULTIPLICATION

1. Produit d'un nombre entier par 10, 100, 1 000..., 10^n.

Soit à multiplier 17 par 10. Ce produit est égal à 10 fois 17, ou à 17 fois 10, c'est-à-dire à 17 fois 1 dizaine, ou 17 dizaines, ou 170 unités :

$$17 \times 10 = 170.$$

De même :

$$25 \times 100 = 2\,500 \qquad 30 \times 1\,000 = 30\,000.$$

Pour multiplier un nombre entier par 10, 100, 1 000, ...10^n, on écrit à sa droite 1, 2, 3, ... n zéros.

2. Technique de la multiplication.

1er CAS. — ***Produit de deux nombres d'un seul chiffre.***

Le résultat est donné par la table de multiplication que l'on connaît par cœur :

$$7 \times 4 = \mathbf{28}.$$

2e CAS. — ***Le multiplicande est un nombre quelconque.***

a) ***Le multiplicateur n'a qu'un seul chiffre.***

```
  467
    3
 ----
   21
  180
1 200
 ----
1 401
    1
```

EXEMPLE : 467 × 3.

$$\begin{aligned} 467 \times 3 &= (400 + 60 + 7) \times 3 \\ &= 400 \times 3 + 60 \times 3 + 7 \times 3 \\ &= 4 \times 100 \times 3 + 6 \times 10 \times 3 + 7 \times 3 \\ &= 4 \times 3 \times 100 + 6 \times 3 \times 10 + 7 \times 3. \end{aligned}$$

Nous sommes ramenés :

1° à effectuer trois produits de nombres d'un seul chiffre :

$$4 \times 3 = 12 ; \quad 6 \times 3 = 18 \quad \text{et} \quad 7 \times 3 = 21 ;$$

2° à multiplier le premier de ces produits par 100 et le second par 10. Or, le produit d'un nombre par 10, 100, 1 000, etc., s'obtient en écrivant 1, 2, 3, ..., zéros à la droite du nombre :

$$12 \times 100 = 1\,200 \qquad 18 \times 10 = 180.$$

```
  467
    3
 ----
1 401
```

Il suffit ensuite d'ajouter les produits obtenus :

$$1\,200 + 180 + 21 = 21 + 180 + 1\,200 = \mathbf{1\,401}.$$

On pourrait disposer l'opération comme il est indiqué plus haut. Mais, dans la pratique, pour gagner du temps, on effectue mentalement les produits partiels et l'on dispose l'opération comme il est indiqué à gauche.

3 fois 7, 21 ; j'écris 1 et je retiens 2 ;
3 fois 6, 18, et 2, 20 ; j'écris 0 et je retiens 2 ;
3 fois 4, 12, et 2, 14 ; j'écris 14.

b) ***Le multiplicateur a plusieurs chiffres.***

EXEMPLE : 345 × 57.

$$345 \times 57 = 345 \times (50 + 7)$$
$$= 345 \times 50 + 345 \times 7$$
$$= 345 \times 5 \times 10 + 345 \times 7.$$

Nous savons calculer le second terme de la somme : 345 × 7 = 2 415 (cas ci-dessus de la multiplication) et le produit 345 × 5 = 1 725 (même cas).

```
   345
    57
  ------
  2 415
  17 25  <- Le zéro terminant
  ------    le produit partiel
 19 665     ne s'écrit pas.
```

Pour obtenir le produit par 10 de 345 × 5, il suffit d'écrire un zéro à la droite de 1 725, ce qui donne 17 250. Le calcul du produit des deux nombres est ainsi ramené à une addition :

2 415 + 17 250 = **19 665.**

Dans la pratique, on dispose les calculs, comme il est indiqué ci-contre, en négligeant l'écriture des zéros terminaux des produits partiels provenant des produits par 10, 100, 1 000, ...

3. Calcul mécanographique.

Dans les bureaux, les multiplications s'effectuent souvent au moyen de *machines à calculer*, capables en général de traiter les quatre opérations.

La plupart des machines à calculer sont des machines à répétition.

Soit à multiplier 345 par 48 : le nombre 345 est d'abord additionné **8** fois, puis, grâce à l'emploi d'un chariot mobile qui déplace le totalisateur d'un rang vers la droite, on multiplie 345 par 4 dizaines en additionnant 4 fois le nombre 345. On lit dans le totalisateur le produit **16 560** (égal à 345 × 8 + 345 × 4 × 10).

Les machines à calculer sont pourvues d'un compteur de tours inscrivant le multiplicateur, ce qui permet un contrôle des nombres de tours effectués.

REMARQUE. — Alors que, dans la multiplication manuscrite, le décalage d'un produit partiel par rapport au précédent s'effectue par déplacement de l'écriture du second d'un rang sur la gauche par rapport au premier, dans le calcul mécanographique c'est le produit partiel précédent que l'on déplace d'un rang sur la droite par rapport au second.

EXERCICES

Calcul mental.

132. 78 × 6 — 24 × 15 — 35 × 33 — 24 × 21 — 34 × 22.
(Décomposer le multiplicateur en un produit de deux facteurs).

133. 81 × 8 — 32 × 8 — 63 × 21 — 74 × 15 — 66 × 15 (Id.).

134. 72 × 9 — 81 × 7 — 56 × 8 — 83 × 5 — 75 × 4.
(Décomposer le multiplicande en une somme de deux termes).

135. 82 × 11 — 68 × 21 — 74 × 31 — 58 × 51 — 36 × 41.
(Décomposer le multiplicateur en une somme de deux termes).

Calcul rapide.

Effectuer les multiplications en ligne :

136. 465 × 8 215 × 9 8 426 × 6 2 327 × 8.

137. 925 × 7 1 245 × 5 40 525 × 3 28 215 × 6.

Effectuer les multiplications suivantes :

138. 124 326 × 84 048 23 909 × 47 205.

139. 240 485 × 125 005 52 586 × 10 207.

Exercices d'application.

140. En multipliant 835 par 507, on a oublié de tenir compte du zéro. Trouver l'erreur commise (sans faire la multiplication exacte et la multiplication erronée).

141. Vous avez multiplié 288 par 256 au lieu de le multiplier par 266. Trouver, sans faire les deux multiplications, l'erreur commise.

142. Vous multipliez 28 par 4. De combien augmentez-vous le nombre 28?

143. Un nombre est multiplié par 9, puis le même nombre est multiplié par 11. Le second produit dépasse le premier de 48. Trouver le nombre.

144. Dans la multiplication de 278 par 345, le second produit partiel n'a pas été décalé d'un rang vers la gauche par rapport au premier, le troisième produit partiel étant décalé de deux rangs. Quelle est l'erreur commise? Étant donné le résultat faux, comment peut-on trouver le résultat exact?

145. Dans la multiplication de 325 par 214, le second produit partiel n'a pas été décalé d'un rang vers la gauche par rapport au premier et le troisième produit partiel est décalé d'un seul rang vers la gauche par rapport au second. Par quel multiplicande 325 a-t-il été multiplié? Quelle est l'erreur commise? A partir du résultat faux, comment trouver le résultat exact?

146. Un élève s'amuse à faire une multiplication en prenant les chiffres du multiplicateur de la gauche vers la droite. Comment doit-il disposer les produits partiels pour arriver au résultat exact? Choisir un exemple.

147. Examiner la suite des nombres 2, 6, 18, 54, 162. Comment obtient-on un nombre de la suite en considérant le précédent? Former les produits du premier nombre par le dernier, du second par l'avant-dernier, du troisième par lui-même. Que remarque-t-on?

148. Le produit d'un nombre de trois chiffres par 7 se termine par 752. Trouver ce nombre.

149. Reconstituer les multiplications suivantes en remplaçant chaque point par un chiffre :

```
  .9        .7        ...
  3.        6.         57
 ----      ----      -----
 .0.       1..       ..4.
...       ..2       ....
 ----      ----      -----
...3      ..28      ..0.8
```

8. SOUSTRACTION. DIFFÉRENCE

1. Différence de deux nombres.

Sur une table se trouve une collection de 11 livres. J'en retire 3. Le nombre de livres restants est la ***différence*** entre 11 livres et 3 livres.

La différence de deux collections de même nature est la collection qui, ajoutée à la plus petite, donne la plus grande.

Considérons maintenant les nombres de livres. La différence entre les nombres 11 et 3 est le nombre tel que son addition à 3 donne 11.

La différence de deux nombres est le nombre qu'il faut ajouter au plus petit pour avoir le plus grand.

2. La soustraction.

La soustraction est l'opération qui permet de calculer la différence de deux nombres.

La différence entre 11 et 3 est le nombre x tel que $3 + x = 11$. Comme on sait que la somme des deux nombres 3 et 8 est égale à 11, on en déduit la valeur $x = 8$ de la différence.

Nous étudierons ultérieurement les moyens pratiques d'effectuer une soustraction.

Dans l'exemple précédent, la différence s'écrit : $11 - 3 = 8$.

Le trait — est le symbole de la soustraction.

Les nombres 11 et 3 sont les ***termes*** de la différence, 8 est la ***différence*** entre 11 et 3 (ou l'***excès*** de 11 sur 3 ou encore le ***reste*** de la soustraction $11 - 3$).

La différence c de deux nombres a et b, indiqués dans cet ordre, s'écrit :

$$a - b = c.$$

Elle est telle que la somme de c et de b est égale à a. Les deux égalités :

$$\boxed{a - b = c}$$

et

$$\boxed{a = b + c}$$

sont équivalentes.

REMARQUES. — 1° La soustraction *n'est pas toujours possible*. On ne peut par exemple soustraire 7 de 2. De même, on ne peut calculer la différence $a - b$ que si $a > b$.

2° Lorsque l'on a à calculer la différence de deux nombres, par exemple de 12 et de 21, on considère qu'il s'agit de *celle que l'on peut calculer*, ici $21 - 12$ et non pas $12 - 21$ (qui n'est pas calculable en arithmétique).

3° Quand deux nombres sont égaux, leur différence est *nulle*. Les égalités $a = b$ et $a - b = 0$ sont équivalentes.

4° La soustraction est *l'opération inverse* de l'addition.

3. Addition d'une différence. Soustraction d'une somme ou d'une différence.

*1° **Ajouter une différence à un nombre.** — Le réservoir d'une automobile contenait 9 l d'essence. Le conducteur ayant acheté, dans la journée, 30 l d'essence et la consommation ayant été de 27 l, calculer la quantité d'essence qui se trouve, le soir, dans le réservoir.*

Ce problème peut être résolu de deux manières :

1. Le soir, le réservoir contient 9 *l* d'essence, plus l'excès de la quantité achetée sur la quantité consommée, excès qui est 30 *l* — 27 *l*.
Il reste donc un nombre de litres égal à :

$$9 + (30 - 27) = 9 + 3 = 12.$$

2. La quantité d'essence restant, le soir, dans le réservoir, est égale au total de la quantité se trouvant le matin dans le réservoir et de la quantité achetée, soit : (9 *l* + 30 *l*) = 39 *l*, diminué de la quantité consommée, 27 *l*.

Il reste alors un nombre de litres égal à :

$$9 + 30 - 27 = 39 - 27 = 12.$$

Et, nous pouvons écrire *l'égalité :*

$$9 + (30 - 27) = 9 + 30 - 27.$$

Pour ajouter une différence à un nombre, on peut :
— soit calculer la différence et l'ajouter au nombre;
— soit ajouter le premier terme de la différence à ce nombre et retrancher le second.

$$\boxed{a + (b - c) = a + b - c}$$

REMARQUE. — Le deuxième procédé est souvent employé en calcul littéral et en calcul mental :

$$x + (16 - y) = x + 16 - y = x - y + 16$$
$$a + (25 - a) = a + 25 - a = a - a + 25 = 25$$
$$36 + 89 = 36 + (90 - 1) = 36 + 90 - 1 = 126 - 1 = \mathbf{125}.$$

*2° **Retrancher une somme d'un nombre.** — Vous vous proposez de faire un parcours de 54 km en trois étapes. Le premier jour, vous faites 15 km, le second 19 km. Trouver la longueur de la troisième étape ?*

Vous pouvez résoudre le problème de deux manières :

1. Après la seconde étape, vous avez parcouru :

$$15 \text{ km} + 19 \text{ km} = 34 \text{ km}.$$

Il vous reste donc à parcourir dans la troisième étape un nombre de kilomètres égal à :

$$54 - (15 + 19) = 54 - 34 = 20 \text{ km}.$$

2. Après la première étape, il vous reste à parcourir :

$$54 \text{ km} - 15 \text{ km} = 39 \text{ km}.$$

Puisque vous parcourez 19 *km* dans la seconde étape, il reste à parcourir dans la troisième un nombre de kilomètres égal à :

$$(54 - 15) - 19 = 54 - 15 - 19 = 39 - 19 = 20 \text{ km}.$$

Vous pouvez donc écrire *l'égalité* :

$$54 - (15 + 19) = 54 - 15 - 19.$$

Pour retrancher une somme d'un nombre, on peut :
— soit calculer la somme et la soustraire du nombre;
— soit retrancher successivement chaque terme de la somme.

$$\boxed{a - (b + c) = a - b - c}$$

REMARQUE. — Le deuxième procédé est souvent employé en calcul littéral et en calcul mental :

$$28 - (a + 5) = 28 - a - 5 = 23 - a$$
$$x + 47 - (15 + y + 8) = x + 47 - 15 - y - 8 = x - y + 24$$
$$58 - 41 = 58 - (40 + 1) = 58 - 40 - 1 = 18 - 1 = \mathbf{17}.$$

3º Retrancher une différence d'un nombre. — *J'ai 250 F dans mon portefeuille ; je dois 87 F à un ami qui, lui-même, me doit 53 F. Après règlement de mes comptes avec cet ami, combien ai-je dans mon portefeuille ?*

Ce problème peut être résolu de deux manières :

1. Je peux verser à mon ami la différence entre ce que je lui dois et ce qu'il me doit, soit : 87 F — 53 F = 34 F. Il me reste alors :

$$250 \text{ F} - (87 \text{ F} - 53 \text{ F}) = 250 \text{ F} - 34 \text{ F} = 216 \text{ F}.$$

2. Je peux verser les 87 F que je dois. J'ai alors 250 F — 87 F. Puis, mon ami me donnant les 53 F qu'il me doit, je possède :

$$250 \text{ F} - 87 \text{ F} + 53 \text{ F} = 216 \text{ F}.$$

Je puis donc écrire les *égalités* :

$$250 - (87 - 53) = 250 - 87 + 53$$
$$250 - (87 - 53) = 250 + 53 - 87.$$

Pour retrancher une différence d'un nombre, on peut :
— soit calculer la différence et la soustraire du nombre;
— soit ajouter au nombre le second terme de la différence, puis retrancher le premier.

$$\boxed{\begin{array}{c} a - (b - c) = a - b + c \\ \text{ou} \\ a - (b - c) = a + c - b \end{array}}$$

REMARQUE. —Ce procédé est souvent employé en calcul littéral et en calcul mental:

$$45 - (30 - a) = 45 - 30 + a = 15 + a$$
$$x + 3 - (y - 6) = x + 3 - y + 6 = x - y + 9$$
$$122 - 99 = 122 - (100 - 1) = 122 - 100 + 1 = \mathbf{23}.$$

4. Propriété fondamentale de la différence.

Considérons la différence $15 - 7$. Ajoutons 4 aux deux termes. Ils deviennent $(15 + 4)$ et $(7 + 4)$. Calculons leur différence : $(15 + 4) - (7 + 4)$.

Considérons que la somme $(15 + 4)$ est effectuée et qu'elle représente un nombre. Nous avons alors à retrancher la somme $7 + 4$ du nombre $(15 + 4)$.

En appliquant la règle du § 3, 2°, nous obtenons :

$$(15 + 4) - (7 + 4) = (15 + 4) - 7 - 4 = 15 + 4 - 7 - 4$$
$$= 15 - 7 + 4 - 4 = 15 - 7.$$

Nous retrouvons donc la première différence $15 - 7$.

Il en serait de même si l'on avait retranché, 3 par exemple, aux deux termes de la différence $15 - 7$.

La différence de deux nombres ne change pas si l'on ajoute (ou retranche) un même troisième aux deux premiers.

Lorsqu'il s'agit de retrancher, le troisième nombre doit être évidemment inférieur au second terme de la différence.

EXERCICES

Calculer de deux manières différentes :

150. $8 + (5 + 2)$ $8 + (5 - 2)$ $8 - (5 + 2)$ $8 - (5 - 2)$.

151. $11 + (7 - 4)$ $11 - (7 + 4)$ $11 - (7 - 4)$ $11 + (7 - 4)$.

152. $17 - (8 - 5)$ $17 + (8 + 5)$ $17 - (8 + 5)$ $17 + (8 - 5)$.

Effectuer les opérations suivantes :

153. $12 + (a + 8)$ $12 - (a + 8)$ $12 + (a - 8)$ $12 - (a - 8)$.

154. $10 - (a - 5)$ $10 + (a - 5)$ $10 + (a + 5)$ $10 - (a + 5)$.

155. $x + (5 + x)$ $x + (5 - x)$ $18 - (3 + x)$ $18 - (3 - x)$.

Calcul mental. — Effectuer :

156. $32 + 19$ $28 + 29$ $57 + 49$ $83 + 99$ $36 + 59$.

157. $47 - 22$ $58 - 31$ $126 - 52$ $315 - 101$ $47 - 29$.

158. $56 - 19$ $72 - 39$ $156 - 99$ $222 - 38$ $107 - 49$.

Calculer les valeurs numériques des expressions suivantes :

159. $a + (5 + b)$ $a - (b + 9)$ pour $a = 15$, $b = 3$.

160. $x - (y + 7)$ $x - (3 + y)$ pour $x = 12$, $y = 2$.

161. $x + (11 - y)$ $x - (y - 7)$ pour $x = 20$, $y = 9$.

162. Calculer un nombre x tel que :

$x + 8 = 23$ $15 - x = 7$ $2 + x = 20$.
$x + 5 = 31$ $21 - x = 9$ $16 - x = 1$.

163. On considère trois nombres a, b, c et on suppose $a \leqslant b$. Comparer les nombres $a + c$ et $b + c$.

164. On considère trois nombres a, b, c ; on suppose $b \leqslant a$ et $c < b$. Comparer les nombres $b - c$ et $a - c$.

165. On considère quatre nombres a, b, c, d tels que $a < b$ et $c < d$. Comparer $a + c$ et $b + d$. Que peut-on en conclure? Est-il possible de comparer $a + d$ et $b + c$?

166. Que devient la différence de deux nombres a et b (en supposant $a - b > 5$) :
1° quand on ajoute 5 au plus grand?
2° quand on retranche 5 au plus petit?
3° quand on retranche 5 au plus grand?
4° quand on ajoute 5 au plus petit?
5° quand on ajoute 5 au plus grand et 5 au plus petit?
6° quand on retranche 5 au plus grand et 5 au plus petit?

167. Que devient la différence de deux nombres a et b quand on ajoute 5 au plus grand et 2 au plus petit?

168. Que devient la différence de deux nombres a et b lorsqu'on ajoute 7 au plus grand et 12 au plus petit? La nouvelle soustraction est-elle toujours possible?

169. Que devient la différence de deux nombres a et b lorsqu'on retranche 4 au plus grand et 5 au plus petit? (On suppose que $b > 5$.)

170. Comment est modifiée la différence de deux nombres a et b lorsqu'on ajoute 15 au plus grand et retranche 5 au plus petit? (On suppose $b > 5$.)

171. Comment est modifiée la différence de deux nombres a et b quand on retranche 8 au plus grand et ajoute 5 au plus petit? Condition de possibilité.

172. Que devient la différence de deux nombres a et b lorsqu'on ajoute 7 au plus grand et qu'on retranche 7 au plus petit? Condition de possibilité.

173. On ajoute 5 au second terme d'une différence; celle-ci devient égale à 8. Quelle était la différence initiale?

174. On retranche 7 au premier terme d'une différence; celle-ci devient égale à 11. Quelle était la différence initiale?

175. Trouver deux nombres sachant que l'un est triple de l'autre et que leur différence est 38.

176. On considère des nombres quelconques de deux chiffres et on les écrit $10\,d + u$.
1° Un de ces nombres diminue de 18 quand on intervertit ses chiffres et le chiffre des unités est 4. Quel est ce nombre ?
2° Un autre de ces nombres diminue de 45 lorsqu'on intervertit ses chiffres et ses deux chiffres ont pour somme 11. Quel est ce nombre ?

177. A la somme de deux nombres $(a + b)$ ajouter leur différence $(a - b)$. Que remarquez-vous? En déduire la règle qui permet de trouver le plus grand des deux nombres.
De la somme de deux nombres $(a + b)$ retrancher leur différence $(a - b)$. Que remarquez-vous ? Comment calcule-t-on deux nombres connaissant leur somme et leur différence ?

178. Trouver deux nombres connaissant leur somme 36 et leur différence 24.

179. Trouver deux nombres connaissant leur somme 102 et leur différence 12.

180. Une robe et un manteau coûtent ensemble 520 F. Le manteau coûte 80 F de plus que la robe. Calculer le prix de la robe et celui du manteau.

181. Un segment AB mesure 56 *cm*. Trouver sur AB un point M dont la différence des distances à A et à B soit 22 *cm*. Nombre de positions que peut occuper le point M ?

182. Un automobiliste se trouve en un point A distant de 160 *km* d'un point B où se trouve un cycliste. Les deux mobiles vont à la rencontre l'un de l'autre : ils se rencontrent au bout de 2 *h*. S'ils partaient tous les deux dans le sens de A vers B, l'automobiliste rejoindrait le cycliste en 4 *h*. Les deux mobiles partant dans les deux cas à la même heure, indiquer la vitesse horaire de chacun d'eux.

9. POLYNÔMES ARITHMÉTIQUES

1. Définition.

Écrivons une suite d'additions et de soustractions, par exemple :

$$25 - 15 + 8 - 11 - 5.$$

Cette suite constitue un ***polynôme arithmétique*** (ou une somme mixte).

Un polynôme arithmétique est une suite de nombres séparés par les signes d'addition et de soustraction, les opérations à effectuer étant toutes possibles dans l'ordre indiqué.

Voici un polynôme composé de lettres : $a + b - c - d + e$. Les nombres a, b, c, d, e, sont les *termes* de ce polynôme, qui comprend des termes *additifs* (précédés du signe +) et des termes *soustractifs* (précédés du signe —).

2. Calcul de la valeur d'un polynôme arithmétique.

Un magasinier note sur une fiche de stock : entrées, 126 ; entrées, 25 ; sorties, 32 ; entrées, 50 ; sorties, 17 ; sorties, 24. Quel est le stock final ?

Le stock cherché est :

$$126 + 25 - 32 + 50 - 17 - 24.$$

Il peut être calculé de deux manières :

1° *En effectuant les opérations dans l'ordre indiqué,* on trouve successivement : 151, 119, 169, 152, 128.
Le stock cherché est 128.

2° *En faisant la différence entre le total des entrées et celui des sorties :*

$$(126 + 25 + 50) - (32 + 17 + 24) = 201 - 73 = 128.$$

Les deux résultats trouvés sont nécessairement *égaux*, car le stock final ne dépend pas de la façon dont on le calcule. Donc :

$$126 + 25 - 32 + 50 - 17 - 24 = (126 + 25 + 50) - (32 + 17 + 24).$$

Pour calculer la valeur d'un polynôme, on peut soustraire le total des termes précédés du signe — du total des termes précédés du signe +.

$$\boldsymbol{a - b + c - d + e - f = (a + c + e) - (b + d + f)}$$

REMARQUE. — Dans un polynôme arithmétique, le premier terme doit être considéré comme étant précédé du signe +.

3. Propriété commutative des polynômes arithmétiques.

Considérons le polynôme : $126 + 25 - 32 + 50 - 17 - 24$.

Intervertissons l'ordre de certains termes et écrivons-le, par exemple :

$$126 - 32 - 17 + 50 - 24 + 25.$$

En appliquant la règle donnée dans le paragraphe précédent, on constate que ce second polynôme est lui aussi égal à :

$$(126 + 25 + 50) - (32 + 17 + 24).$$

Donc : $126 + 25 - 32 + 50 - 17 - 24 = 126 - 32 - 17 + 50 - 24 + 25$.

Lorsqu'on intervertit l'ordre des termes d'un polynôme, les opérations indiquées restant possibles, la valeur du polynôme ne change pas.

$$a - b + c - d + e - f = a + c - f + e - d - b$$

APPLICATION. — Pour effectuer des additions et des soustractions successives, on s'efforce, quand c'est possible, d'obtenir des résultats partiels terminés par un zéro.

EXEMPLE : $149 + 25 - 89$. On dit : 149 moins 89... 60, plus 25... 85.

REMARQUE. — Si l'on change le premier terme de place, on doit le remplacer par un terme additif et toutes les opérations doivent rester possibles.

4. Addition et soustraction d'un polynôme arithmétique.

1° Ajouter un polynôme arithmétique. — *Le caissier d'un magasin a en caisse, le matin, 2 000 F. Il inscrit les opérations de la journée : recettes du matin : 800 F ; dépenses du matin : 250 F ; recettes de l'après-midi : 400 F ; dépenses de l'après-midi, 215 F. Exprimer le montant de l'encaisse, en fin de journée ?*

Le montant de cette encaisse peut être calculé de deux manières :

1° En ajoutant à l'encaisse du matin le résultat des opérations de la journée :

$$2\,000 + (800 - 250 + 400 - 215).$$

2° En notant l'encaisse après chaque opération :

$$2\,000 + 800 - 250 + 400 - 215.$$

Comme le résultat est *le même* dans les deux cas, puisqu'il représente la même encaisse, on peut écrire :

$$2\,000 + (800 - 250 + 400 - 215) = 2\,000 + 800 - 250 + 400 - 215.$$

Pour ajouter un polynôme arithmétique à un nombre, on peut écrire, à la suite du nombre, les termes du polynôme sans changer leurs signes.

$$a + (b + c - d - e + f) = a + b + c - d - e + f$$

EXEMPLES :

$$100 + (25 - 10 + 30 + 20 - 15) = 100 + 25 - 10 + 30 + 20 - 15 = \mathbf{150}.$$

$$a + (8 - b + 5) = a + 8 - b + 5 = a - b + 13$$

(toutes les opérations doivent être possibles).

$$(60 + 20 - 5) + (40 - 30 + 10) = 60 + 20 - 5 + 40 - 30 + 10 = \mathbf{95}.$$

2° ***Retrancher un polynôme arithmétique.*** — *Je dois 50 F à un fournisseur. Je lui verse 40 F, mais je lui achète ensuite pour 14 F et 8 F de marchandises. Exprimer le montant nouveau de ma dette.*

Cette nouvelle dette peut être calculée de deux manières :

1° En considérant que je paye les derniers achats, 14 F et 8 F, sur les 40 F versés, je consacre au remboursement de la dette antérieure : 40 F — 14 F — 8 F ; je dois alors, en francs : 50 — (40 — 14 — 8).

2° En établissant le montant de ma dette après chaque opération, je dois finalement, en francs :

$$50 - 40 + 14 + 8.$$

Puisque le résultat est *le* même dans les deux cas, je peux écrire l'égalité :

$$50 - (40 - 14 - 8) = 50 - 40 + 14 + 8.$$

Pour retrancher un polynôme arithmétique d'un nombre, on peut écrire, à la suite du nombre, les termes de ce polynôme en changeant leurs signes.

$$\boxed{a - (b + c - d - e) = a - b - c + d + e}$$

EXEMPLES :

$$100 - (25 - 10 + 30 + 20 - 15) = 100 - 25 + 10 - 30 - 20 + 15 = \mathbf{50}.$$

$$a - (8 - b + 5) = a - 8 + b - 5 = a + b - 13$$

(toutes les opérations doivent être possibles).

$$(60 + 20 - 5) - (40 - 30 + 10) = 60 + 20 - 5 - 40 + 30 - 10 = \mathbf{55}.$$

5. Introduction des parenthèses dans une suite d'additions et de soustractions.

1° Nous avons établi dans le paragraphe 4, 1°, l'égalité :

$$a + (b + c - d - e + f) = a + b + c - d - e + f. \qquad (1)$$

Donc : ***lorsqu'une parenthèse est précédée du signe +, on peut la supprimer.***

EXEMPLE : $35 + (18 - a - b + 12) = 35 + 18 - a - b + 12 = 65 - a - b.$

2° Permutons les deux membres de l'égalité (1) :

$$a + b + c - d - e + f = a + (b + c - d - e + f).$$

Donc : ***on peut introduire une parenthèse après un signe +.***

EXEMPLE : $47 - 19 + 23 - 5 - 8 + 15 = 47 - 19 + (23 - 5 - 8) + 15.$

3° Nous avons établi, dans le paragraphe 4, 2°, l'égalité :

$$a - (b + c - d - e) = a - b - c + d + e. \qquad (2)$$

Donc : ***lorsqu'une parenthèse est précédée du signe —, on peut la supprimer, à condition de changer les signes des termes compris dans la parenthèse.***

EXEMPLE : $35 - (18 - a - b + 12) = 35 - 18 + a + b - 12 = 5 + a + b.$

4° Permutons les deux membres de l'égalité (2) :

$$a - b - c + d + e = a - (b + c - d - e).$$

Donc : ***on peut introduire une parenthèse après un signe —, à condition de changer les signes des termes qui entrent dans la parenthèse.***

EXEMPLE : 85 — 7 — 51 + 3 — 9 = 85 — (7 + 51 — 3) — 9.

EXERCICES

Calculer rapidement la valeur des polynômes arithmétiques suivants :

183. 85 + 18 — 25   65 — 19 — 43   127 — 36 — 82.

184. 57 + 26 — 29 — 16 + 12   52 — 7 — 15 + 25 — 8.

185. 256 — 38 + 74 — 15   127 — 87 + 45 — 18 + 6.

Calculer la valeur numérique des polynômes suivants :

186. $47 - a + 21 + b - 35 - c$ pour $a = 45$, $b = 32$, $c = 5$.

187. $x - 38 - y + 94 + z - 120$ pour $x = 48$, $y = 8$, $z = 24$.

188. $m - 27 - n + 39 - p - 29$ pour $m = 57$, $n = 10$, $p = 9$.

189. Voici la fiche de stock d'un lot de robinets du type R. 75. Déterminer le stock à la date du 29 novembre au soir :

1° en calculant successivement les existants en stock à la fin de chacune des journées indiquées dans la fiche ;

2° en cherchant la différence d'une part, entre le total du stock au 31 octobre et des entrées successives en magasin et, d'autre part, le total des sorties :

Robinets type R. 75.			
Date des opérations.	Entrées.	Sorties.	Stock.
Stock au 31 octobre.			563
Le 2 novembre		28	
Le 10 novembre	54	23	
Le 18 novembre	35	103	
Le 25 novembre	37		
Le 29 novembre		205	

Réduire les polynômes suivants (on suppose toutes les opérations possibles) :

190. $25 + a - 13 - b + 75$ $345 - x + 125 - y$.

191. $72 - 28 - a - b + 15$ $75 - x - 9 - y - 8$.

Effectuer les additions suivantes (par suppression des parenthèses), puis réduire le nombre de termes :

192. 28 + (15 — 7 + 9 — 6)   35 + (18 — 16 — 1 + 7).

193. 23 + (64 — 18 — 29 — 5)   38 + (87 — 60 + 19 + 9).

194. $a + (28 - 16 - 12 + 7)$ $75 + (a - 5 + 24 - b)$.

195. $18 + (42 - a + 25 - b)$ $200 + (64 + a - 100 - b)$.

Effectuer les soustractions suivantes (par suppression des parenthèses), puis réduire le plus possible le nombre de termes :

196. $50 - (45 + 18 - 11 - 3)$ $\qquad$ $62 - (40 - 15 - 7 + 11)$.

197. $43 - (24 - 16 + 7 - 5)$ $\qquad$ $49 - (19 - 12 - 5 + 8)$.

198. $75 - (50 - a - 12 + b)$ $\qquad$ $80 - (x - 16 + y - 28)$

199. $85 - (a + 15 + 31 - b)$ $\qquad$ $78 - (35 - x - 14 + y)$.

200. Calculer un nombre x tel que :
$x - 2 + 7 - 5 = 15$ $\qquad$ $x + 8 - 3 - 5 + 7 = 22$.

Dans les polynômes suivants, chasser les parenthèses, puis effectuer les opérations :

201. $(24 - 15 + 12) + (40 - 7 - 11) - (16 + 5 - 20)$.

202. $(50 + 25 - 40 - 5 + 7) - (20 - 6 + 8) + (16 - 9 - 2)$.

Dans les polynômes suivants, chasser les parenthèses (et, le cas échéant, les crochets), puis réduire le nombre de termes :

203. $100 + (a - 21 + 58 - b) - (30 - c + 15 - 8)$.

204. $240 + 250 - x - (85 + y) - [100 - (14 + z)]$.

205. $320 - [50 + a - (20 + b)] - [15 - (a + 7)]$.

On donne les polynômes suivants. Écrire, pour chacun d'eux, un polynôme qui lui soit égal et qui comporte des parenthèses (ouvrir et fermer ces parenthèses à l'endroit où se trouvent les flèches) :

206. $67 - 34 + {\downarrow}18 - 15 - 1 + 7{\downarrow} - 5$.

207. $80 - {\downarrow}50 - 10 - 8 + 7 - 5 + 2{\downarrow}$.

208. $60 + 12 - {\downarrow}20 + a - 5 - 3{\downarrow} + {\downarrow}8 - 7 + b{\downarrow}$.

209. Un élève étourdi a copié trois polynômes sans placer les parenthèses qui devraient s'y trouver. Retrouver la place de ces parenthèses (qui se ferment après le dernier terme) :
1° $6 - 7 - 3 + 1$; $\qquad$ 2° $8 - 15 + 5 - 12$; $\qquad$ 3° $6 + 3 - 10 - 4$.

210. Déterminer les valeurs de x dans les polynômes suivants :
$18 - x + 8 - 7 = 3$ $\qquad$ $15 + x - 7 + 3 = 16$ $\qquad$ $25 - (12 - x) + 3 = 21$.

211. On donne l'égalité : $(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d)$; a et b représentent les recettes en francs de la matinée et de l'après-midi d'une première caisse ; c et d représentent les recettes en francs de la matinée et de l'après-midi d'une seconde caisse. Donner la signification concrète du second membre de l'égalité.

212. En calculant l'expression : $22 - (a + 5) + (b - 8) - (c - 7)$, un élève oublie de tenir compte des parenthèses. Quelle est l'erreur commise?

213. Un élève, au lieu de calculer $x - (y - z)$, calcule $x - y - z$. Il commet une erreur de 28 unités. Quelle est la valeur de z? Sachant que x et y ont pour somme 74 et pour différence 38, calculer la valeur numérique de l'expression $x - (y - z)$.

214. Désigner un nombre entier par x. Comment exprime-t-on le nombre entier qui le précède? le nombre entier qui le suit? Déterminer le total des trois nombres. Trouver trois nombres consécutifs dont la somme est 171.

Effectuer les calculs suivants :

215. $28 - 5 \times 2 - 4 \times 3$ $\qquad$ $30 + 8 \times 3 - 7 \times 5$.

216. $40 - 5 \times 3 + 7 \times (12 + 2)$ $\qquad$ $18 + (8 + 3) \times 6 - 3 \times (7 + 2)$.

217. $45 - 7 \times 2 - [10 - 2 \times (6 - 4)]$ $\qquad$ $24 + [(7 + 3) \times 5 - 2 \times 7 + 1]$.

218. $5 \times 8 + 3 \times x - 15$ $\qquad$ $12 \times a - 3 \times (a - 2) + 2 \times (a + 1)$.

219. $7 \times 6 - x - 6 \times 5 + 7$ $\qquad$ $28 - 2 \times 5 + 7 - 3 \times (x + 2)$.

10. PRODUITS DE DIFFÉRENCES

1. Produit d'une différence par un nombre.

Un commerçant achète 12 appareils de télévision d'un type donné, au prix brut de 1 450 F et compte tenu d'une remise de 290 F par appareil. Il peut calculer de deux façons le prix net à payer.

1° Il achète un appareil au prix net de (1 450 F — 290 F) et doit payer pour les 12 appareils :

$$(1\,450 \text{ F} - 290 \text{ F}) \times 12.$$

2° Le prix brut des 12 appareils s'élève à 1 450 F × 12 ; la remise totale à : 290 F × 12. Il doit donc payer :

$$1\,450 \text{ F} \times 12 - 290 \text{ F} \times 12.$$

Le prix net à payer résultant des deux calculs étant *le même* :

$$(1\,450 - 290) \times 12 = 1\,450 \times 12 - 290 \times 12.$$

Pour multiplier une différence par un nombre, on peut multiplier chaque terme de la différence par le nombre, puis retrancher le second produit obtenu du premier.

$$\boxed{(a - b) \times m = a \times m - b \times m}$$

EXEMPLES :

$(20 - 5) \times 3 = 60 - 15 = 45$ | $(8 - a) \times 2 = 16 - 2a.$

2. Produit d'un nombre par une différence.

La multiplication étant une opération commutative :

$$m \times (a - b) = (a - b) \times m$$

et :

$$\boxed{m \times (a - b) = a \times m - b \times m}$$

Pour multiplier un nombre par une différence, on peut multiplier chaque terme de la différence par le nombre, puis retrancher le second produit obtenu du premier.

EXEMPLES :

$5 \times (8 - 5) = 40 - 25 = 15$ | $11 \times (7 - 1) = 77 - 11 = 66.$

3. Applications.

1° Au calcul mental. ***Multiplication d'un nombre par 9, 19, ...99.***

EXEMPLE : *27 × 19.* Comme 19 = 20 — 1, on calcule d'abord le produit de 27 par 20 qui s'obtient en multipliant 27 par 2, puis 54 par 10, et qui vaut 540. On retranche ensuite 27 de 540. On obtient **513.**

Pour multiplier un nombre par 9, 19, ...99, on le multiplie par 10, 20, ...100, puis on le retranche du résultat obtenu.

2° Au calcul littéral.

EXEMPLES :

$(a - 5) \times 2 = 2a - 10$	$7 \times (8 - x) = 56 - 7x$
$(2x - 3) \times 5 = 10x - 15$	$3 \times (2a - 1) = 6a - 3.$

3° A la mise en facteur commun.

La différence 18 — 12, dont les deux termes sont multiples de 6, puisque $18 = 6 \times 3$ et $12 = 6 \times 2$, peut être écrite sous la forme d'un produit de facteurs :

$$18 - 12 = 6 \times (3 - 2).$$

De même :

$$35a - 25 = 5 \times (7a - 5)$$
$$7a - 3a = a \times (7 - 3) = a \times 4 = 4a.$$

4. Produit d'une différence par une différence.

EXEMPLE : $(9 - 3) \times (7 - 2)$.

Considérons la première différence comme effectuée. Nous sommes ramenés au cas du produit du nombre (9 — 3) par la différence 7 — 2. Appliquons les règles énoncées dans les paragraphes 2 et 1 ci-dessus :

$$(9 - 3) \times (7 - 2) = (9 - 3) \times 7 - (9 - 3) \times 2$$
$$= (9 \times 7 - 3 \times 7) - (9 \times 2 - 3 \times 2)$$
$$= 9 \times 7 - 3 \times 7 - 9 \times 2 + 3 \times 2$$

$$\boxed{(a - b) \times (m - n) = am - bm - an + bn}$$

APPLICATION. — Calcul de :

$$(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

5. Produit d'une différence par une somme.

EXEMPLE : $(8 - 5) \times (7 + 2)$.

Considérons la différence comme effectuée. Nous sommes ramenés au cas du produit du nombre (8 — 5) par la somme 7 + 2 :

$$(8 - 5) \times (7 + 2) = (8 - 5) \times 7 + (8 - 5) \times 2$$
$$= 8 \times 7 - 5 \times 7 + (8 \times 2 - 5 \times 2)$$
$$= 8 \times 7 - 5 \times 7 + 8 \times 2 - 5 \times 2.$$

$$\boxed{(a - b) \times (m + n) = am - bm + an - bn}$$

S'il s'agissait du produit de la somme $(m + n)$ par la différence $(a - b)$, on obtiendrait le même polynôme produit.

APPLICATION. — $(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab + b^2 = a^2 - b^2.$

REMARQUE IMPORTANTE relative aux signes des produits partiels. Dans le calcul précédent, nous avons multiplié chaque terme de la différence par chaque terme de la somme et nous avons donné à chaque produit partiel obtenu :

le signe + quand les deux facteurs sont de même signe ;

le signe — quand les deux facteurs sont de signes contraires.

Cette règle, appelée *règle des signes*, est générale. Constater qu'elle s'applique aux paragraphes 1, 2, 4 de la présente leçon.

6. Suites de sommes, de différences, de produits.

Nous avons déjà étudié, dans la 4e leçon, la convention de calcul d'une suite d'additions et de multiplications. En étendant cette convention au cas de la soustraction, *les opérations doivent être effectuées dans l'ordre suivant :*

a) additions ou soustrations indiquées dans les parenthèses (si possible) ;

b) multiplications indiquées hors des parenthèses ;

c) additions ou soustractions indiquées hors des parenthèses.

EXEMPLE 1. — *Calculer la valeur de l'expression :*

$$A = 10 + 5 \times (8 - 2) - 3 \times (12 - 7).$$

Nous obtenons successivement :

$$A = 10 + 5 \times 6 - 3 \times 5 = 10 + 30 - 15 = \mathbf{25}.$$

EXEMPLE 2. — *Calculer la valeur de l'expression :*

$$A = 60 + 3 \times (5 - b) - (c - 3) \times 7.$$

Nous obtenons successivement :

$$A = 60 + 15 - 3\,b - (7\,c - 21) = 60 + 15 - 3\,b - 7\,c + 21$$
$$A = 96 - 3\,b - 7\,c.$$

EXERCICES

Calculer rapidement :

220. 32×9 $\quad 58 \times 9$ $\quad 35 \times 99$ $\quad 47 \times 99.$

221. 24×19 $\quad 58 \times 19$ $\quad 83 \times 39$ $\quad 75 \times 49.$

222. 149×5 $\quad 119 \times 6$ $\quad 98 \times 7$ $\quad 96 \times 5.$

223. Effectuer le produit $(a + b) \times (a - b)$. Calculer rapidement le produit de 21 par 19, celui de 32 par 28.

Effectuer les opérations suivantes en appliquant les règles indiquées dans la leçon (puis vérifier en calculant d'abord les expressions entre parenthèses) :

224. $(9 + 5) \times 4$ $\quad (8 + 3 + 7) \times 5$ $\quad (15 + 21 + 9) \times 11.$

225. $(9 - 5) \times 3$ $\quad (14 - 6) \times 7$ $\quad (21 - 17) \times 5.$

226. $16 \times (29 - 18)$ $\quad 49 \times (24 - 15)$ $\quad 30 \times (48 - 19).$

227. $(14 + 17 - 8) \times 5$ $\quad (21 + 17 - 16) \times 8$ $\quad (14 - 7 - 5) \times 9.$

228. $6 \times (35 - 18 + 17)$ $\quad 11 \times (9 - 2 + 3)$ $\quad 50 \times (20 + 5 - 11).$

Effectuer les calculs suivants et, quand c'est possible, réduire le nombre de termes :

229. $(x + 4) \times 7$ $(y + 5 - 3) \times 6$ $(7 + a - b) \times 8$.

230. $2 \times (a - 2)$ $7 \times (2 - x)$ $15 \times (x + 3)$.

231. $(9 - a + 5) \times 3$ $(8 + 3 - x) \times 5$ $(x - y + 3) \times 9$.

232. $7 \times (x + 9 - 5)$ $8 \times (8 - y + 7 - x)$ $9 \times (a + b - c - 5)$.

233. $(3\,x + 5\,y - 7) \times 2$ $(9\,a - 5 + 3\,b) \times 3$ $(12\,a - 5\,b - 3\,c) \times 4$.

234. $4 \times (9\,x - 5\,y + 3\,z)$ $25 \times (3\,a - 4\,b - 5\,c)$ $8 \times (15 - 2\,x + 3\,y)$.

Effectuer les calculs suivants et, quand c'est possible, réduire le nombre de termes :

235. $(5 + 3) \times (7 + 4)$ $(19 + 8 + 3) \times (5 + 1)$.

236. $(9 - 4) \times (11 - 5)$ $(16 + 12) \times (8 - 5)$.

237. $(8 - 3) \times (9 + 5)$ $(7 - 2) \times (8 - 3)$.

238. $(12 + 4 - 3) \times (7 - 5)$ $(12 - 4 + 3) \times (8 + 2)$.

239. $(a - b + 3) \times (b - 5)$ $(x + 7 - y) \times (a + 1)$.

240. $(x + 5 - a) \times (a + 2)$ $(x - a + 3) \times (a - 2)$.

Effectuer les calculs suivants :

241. $11 \times 7 + 18 \times 15 - 9 \times 3 + 12 \times 5 - 14 \times 6$.

242. $(16\,x - 2\,y + 7) \times 5 + 8 \times (7\,x - 9) - (11 - a) \times 2$.

243. $(15\,a - 12\,b) \times 8 - (7 - a) \times (2 - b)$.

244. Calculer :

$15 + x \times 8 - y$ $(15 + x) \times 8 - y$

$15 + x \times (8 - y)$ $(15 + x) \times (8 - y)$.

Trouver les valeurs numériques des résultats pour $x = 11$, $y = 5$.

245. Calculer :

$41 - a \times 7 - b$ $(41 - a) \times 7 - b$

$41 - a \times (7 - b)$ $(41 - a) \times (7 - b)$.

Trouver les valeurs numériques des résultats pour $a = 5$ et $b = 3$.

246. Que devient le produit (24×15) quand on diminue de 2 unités le multiplicande? Que devient le produit $a \times b$ quand on augmente de 3 le multiplicande?

247. On diminue de 5 unités le multiplicateur du produit 24×15. Que devient le produit? Enlever 3 unités à b dans le produit $a \times b$. Que devient ce produit?

248. Que devient le produit de deux nombres a et b quand on diminue de 5 le multiplicande et de 3 le multiplicateur? Effectuer le produit $(a - 5) \times (b - 3)$ et le comparer au produit $a \times b$.

249. Deux nombres ont pour produit 750. On diminue l'un de ces nombres de 5 : le produit diminue de 125. Trouver les deux nombres.

250. Deux nombres a et b ont pour produit 600. On diminue le premier de 5 unités et on augmente le second de 5 unités. Le nouveau produit dépasse de 225 le produit $a \times b$. Calculer a et b sachant que $a + b = 70$.

251. Un jardin rectangulaire a pour périmètre 130 *m*. On diminue de 1 *m* sa longueur et on ajoute 1 *m* à sa largeur : sa surface augmente de 14 m^2. Trouver les deux dimensions (on trouvera, au préalable, la différence des deux dimensions).

252. Un nombre est désigné par x. On le multiplie par 3 et au produit on ajoute 5. Écrire l'expression du résultat. Quand ce résultat vaut 23, quelle est la valeur de x?

253. Désigner un nombre par x. Lui ajouter 5. Multiplier le total par 3. Écrire l'expression du résultat. Quelle est la valeur de x quand le résultat est 33?

254. Voici une expression : $a(b - c) + b(c - a)$. Effectuer les produits. Réduire le nombre de termes du polynôme. Mettre ensuite le polynôme sous la forme du produit d'une différence par un nombre.

Calculer la valeur numérique du produit pour $a = 2$, $b = 7$, $c = 5$.

255. A la foire, un charlatan raconte qu'il sait deviner la pensée des gens. Voici, dit-il à Jacques, une ardoise et de la craie. Écrivez un nombre entier à votre choix. Multipliez-le par 3, ajoutez 1 au produit. Multipliez le total obtenu par 3. Ajoutez à ce dernier produit le premier nombre choisi. Combien trouvez-vous?

1 273, répond Jacques.

Eh bien, dit le charlatan, le nombre que vous avez choisi est 127.

Après avoir fait, sur des nombres plus simples que 127, la suite des calculs commandés par le charlatan, vous expliquerez à Jacques comment ces calculs peuvent être remplacés par une seule multiplication, suivie d'une addition ; et vous lui donnerez la règle de calcul mental qui permet, connaissant le résultat, d'en tirer le nombre choisi.

Mettre les différences suivantes sous forme de produits de facteurs :

256. $60 \times 8 - 45 \times 8$ $\quad$ $32 \times 7 - 15 \times 7$ $\quad$ $43 \times 9 - 39 \times 9$.

257. $28 \times 6 - 6 \times 24$ $\quad$ $33 \times 5 - 19 \times 5$ $\quad$ $51 \times 11 - 41 \times 11$.

Transformer les polynômes suivants en produits de deux facteurs :

258. $54 - 42 + 18$ $\quad$ $75 - 25 + 45$ $\quad$ $36 + 63 - 54$.

259. $7 \times 6 - 4 \times 6 - 6$ $\quad$ $49x + 7 - 21x$ $\quad$ $33a - 22b + 44c$.

260. $ax + 5x$ $\quad$ $5a + 8a - 3a$ $\quad$ $a + ab - ac$.

Effectuer les opérations suivantes :

261. $25a - 17a$ $\quad$ $20a - 19a$ $\quad$ $(7x + 5) - 4x$.

262. $25x - (8x + 3x)$ $\quad$ $11x - (8x - 3x)$ $\quad$ $5x + (3x - 2x)$.

263. $(3x + 2) \times (5x - 2)$ $\quad$ $(6x - 1) \times (7x + 3)$ $\quad$ $(x - 1) \times (2x + 3)$.

Réduire les termes semblables dans les polynômes suivants :

264. $15x - 3 + 7x + 18 - 16x - 7$.

265. $32x - 15x + 12 - 5 + 17x - 6$.

266. Calculer : $(a - b)^2$ $\quad$ $(a - 5)^2$ $\quad$ $(x - 7)^2$.

267. Calculer : $(a + b)(a - b)$ $\quad$ $(a + 5)(a - 5)$ $\quad$ $(x - 7)(x + 7)$.

268. Trouver deux nombres connaissant leur différence 1 et la différence de leurs carrés 123. Utiliser le résultat trouvé dans l'exercice précédent pour $(a + b)(a - b)$.

269. Calculer $(a + b)^2$, puis $(a - b)^2$; chercher la différence de ces deux expressions.

Application. — Trouver a et b connaissant leur somme 18 et leur produit 77.

II. PRATIQUE DE LA SOUSTRACTION

I. Technique de l'opération.

1[er] CAS. — *Le petit nombre et la différence n'ont qu'un seul chiffre.*

Soit à calculer 16 — 9. On connaît par cœur la somme de deux nombres d'un seul chiffre. On sait donc que $9 + 7 = 16$.
7 est la différence entre 16 et 9 : $16 - 9 = 7$.

2[e] CAS. — *Les deux nombres sont quelconques.*

a) Les chiffres du petit nombre ne dépassent pas les chiffres de même ordre du grand nombre.

EXEMPLE : 87 — 34. La différence *d* de ces deux nombres s'écrit :

$$\begin{aligned} d &= 87 - 34 \\ &= (80 + 7) - (30 + 4) \\ &= 80 + 7 - 30 - 4 \\ d &= (80 - 30) + (7 - 4) \end{aligned}$$

$$\boxed{d = (8 - 3) \times 10 + (7 - 4)}$$

$$= 5 \times 10 + 3.$$

Le résultat est 53.

$$\begin{array}{r} 87 \\ -34 \\ \hline 53 \end{array}$$

Pour l'obtenir, on soustrait du nombre d'unités du grand nombre, le nombre d'unités du petit nombre ; du nombre de dizaines du grand nombre, le nombre de dizaines du petit nombre, etc.

b) Certains chiffres du petit nombre dépassent les chiffres de même ordre du grand nombre.

EXEMPLE : 87 — 29. La différence *d* de ces deux nombres s'écrit :

$$d = 87 - 29 = (80 + 7) - (20 + 9) = 80 + 7 - 20 - 9 = 80 - 20 + 7 - 9.$$

La soustraction du nombre d'unités du petit nombre (9) de celui du grand nombre (7) n'est pas possible. Ajoutons 10 unités au grand nombre, et 10 unités (c'est-à-dire 1 dizaine) au petit nombre. La différence est inchangée et le calcul se présente alors ainsi :

$$\begin{aligned} d &= (80 + 7 + 10) - (20 + 10 + 9) \\ d &= (80 + 17) - (30 + 9) \\ d &= (80 - 30) + (17 - 9) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 87 \\ -29 \\ \hline 58 \end{array}$$

$$\boxed{d = (8 - 3) \times 10 + (17 - 9)}$$

$$d = 5 \times 10 + 8$$

Pour rendre l'opération possible, nous avons appliqué le mécanisme de la retenue, c'est-à-dire l'addition au grand nombre de 10 unités de l'ordre considéré et, au petit nombre, de 1 unité de l'ordre immédiatement supérieur.

2. Calcul rapide écrit ; calcul mécanographique.

1° Soustractions horizontales. — Afin d'éviter les erreurs d'unités, il est bon, comme pour l'addition, de pointer les chiffres retranchés :

. . . . . .
182 805 — 35 946 = . . . 859

. . . .
182 805 — 35 946 = 146 859.

2° Soustractions par addition. — La soustraction par addition est très fréquemment utilisée.

a) Soit à retrancher 2 845 de 8 570.
On dit : 5 et *5*... 10 ; je retiens 1 ; 1 et 4... 5 ; 5 et 2... 7, etc...

	1 01
Petit nombre	2 845
Différence à trouver	*5 725*
Grand nombre..............	8 570

b) Une soustraction peut se présenter sous une forme plus complexe : on doit, par exemple, trouver la différence entre un nombre et la *somme* (*non effectuée*) de plusieurs autres.

EXEMPLE : 114 890 — (20 835 + 41 215 + 21 685).
On dit : 5 et 5... 10 et 5... 15 et *5*... 20 ; je retiens 2 ;
2 et 3... 5 et 1... 6 et 8... 14 et *5*... 19 ; je retiens 1, etc.

	01 12
Nombres à ajouter	20 835
	41 215
	21 685
Différence à trouver......	*31 155*
Total donné	114 890

3° Emploi d'une machine à calculer. — Les machines à calculer peuvent effectuer les soustractions.

Le nombre à soustraire est, par un dispositif approprié de la transmission et du totalisateur, transmis au totalisateur en soustraction, les roues dentées tournant en sens inverse de celui de l'addition.

3. Preuve de la soustraction.

Pour faire la preuve d'une soustraction, on ajoute le petit nombre à la différence trouvée : on doit obtenir le grand nombre.

4. Complément arithmétique d'un nombre.

Le complément arithmétique d'un nombre *a* est le nombre *b* qu'il faut ajouter à *a* pour obtenir une unité de l'ordre immédiatement supérieur à celui des plus hautes unités de *a*.

Ainsi le complément à 100 (1 centaine) du nombre 43 (formé de dizaines et d'unités) est 100 — 43 = 57.

Le complément de 8 536 à 10 000 est 10 000 — 8 536 = 1 464.

Celui de 5 090 à 10 000 est 10 000 — 5 090 = 4 910.

Pour former le complément d'un nombre, on soustrait successivement de 9 chacun des chiffres de ce nombre (à l'exception du dernier chiffre significatif à droite qu'on soustrait de 10).

Applications. — *1° Soustraction d'un nombre par addition du complément.*

N – 63 516 = N + 36 484 — 100 000.

2° *Annulation d'un nombre inexact dans une somme.*

Dans la somme qui devait être écrite **795 + 531 + 816,** on a écrit par erreur **351** au lieu de **531**. On rectifie en écrivant ainsi : **795 + 351 + 816 + 649 — 1 000 + 531.**

annulation

EXERCICES

Soustraire mentalement :

270.	93 — 81	95 — 31	56 — 22	87 — 33.
271.	87 — 69	94 — 59	67 — 19	87 — 18.
272.	524 — 74	832 — 52	955 — 85	872 — 41.

Effectuer les soustractions en ligne :

273.	247 — 128 =	4 375 — 2 889 =	856 318 — 489 216 =
274.	16 249 — 5 308 =	126 208 — 43 475 =	192 515 — 178 149 =

275. Soustractions par addition :

214 621	31 825	13 921 820	20 830 025
......	19 775	41 634 115	41 263 100
816 320	21 560	8 468 975	34 675
	80 425	20 067 810	10 180 420
417 346	21 735	91 534 120	149 325
......	.....	....	....
687 218	218 745	207 947 070	77 597 770

276. Additions verticales et soustractions horizontales :

214 825 — 83 216 = ...	1 242 615 — 731 875 = ...
818 218 — 412 308 = ...	2 694 135 — 1 621 620 = ...
909 249 — 884 717 = ...	9 800 575 — 9 521 425 = ...
326 050 — 180 209 = ...	3 321 720 — 3 131 420 = ...
505 250 — 505 247 = ...	5 638 410 — 4 628 410 = ...
324 827 — 184 218 = ...	421 595 — 268 790 = ...
...... — ...... = ...	.... — .... = ...

277. Remplacer dans les additions suivantes, les points par les chiffres qui manquent :

842	1 84.	74 2.5	25 .47
285	2 .53	8. 335	215
184	2.4	41 .40	3. 7..
....	. 731	.9 02.	.9 164
1 472	8 948	246 655	70 856

278. Remplacer dans les soustractions suivantes, les points par les chiffres qui manquent :

2 791	....	8 .6.	9 .37
....	4 207	. 5.7	. 54.
1 958	5 315	2 391	3 8.6

279. Calculer, pour chacun des nombres suivants, le complément à l'unité immédiatement supérieure à celle de ses plus hautes unités :

17 328 359 4 207 4 359 82 720.

280. Dans les additions suivantes, remplacer les lettres par les chiffres convenables :

$$\begin{array}{r} ab \\ \underline{ba} \\ 121 \end{array} \qquad \begin{array}{r} ab \\ \underline{ba} \\ 77 \end{array} \qquad \begin{array}{r} ab \\ \underline{ba} \\ x65 \end{array} \qquad \begin{array}{r} c8b \\ \underline{3ab} \\ b32 \end{array}$$

281. Dans les soustractions suivantes, remplacer les lettres par les chiffres convenables :

$$\begin{array}{r} 8a \\ \underline{a6} \\ b9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} ab \\ \underline{ba} \\ 18 \end{array}$$

282. En retranchant le nombre 3 528 du nombre 8 342, un élève a oublié de tenir compte des retenues. Sans faire l'opération exacte, dire la valeur de l'erreur commise.

● Dans les trois exercices suivants, le nombre de deux chiffres considéré, qui s'écrit *du*, vaut ($10\,d + u$) unités.

283. Montrer que la différence entre un nombre de deux chiffres et ce nombre renversé vaut 9 fois la différence entre le chiffre des dizaines et le chiffre des unités.

284. Trouver un nombre de deux chiffres qui diminue de 36 lorsqu'on intervertit l'ordre de ses chiffres. On sait que le chiffre des unités est 2.

285. Trouver tous les nombres de deux chiffres qui diminuent de 45 quand on intervertit l'ordre de leurs chiffres.

286. Deux tonneaux contiennent en tout 335 *l* de vin. On soutire 10 *l* du premier tonneau et 125 *l* du second ; il reste alors la même quantité de vin dans les deux tonneaux. Trouver la contenance de chaque tonneau.

287. Des amis déjeunent ensemble dans un restaurant qui offre trois menus, donc trois prix. Le menu moyen qu'ils comptaient prendre ne leur plaît pas. S'ils prennent tous le menu à 9 F, ils dépensent ensemble 10 F de moins que le coût prévu. S'ils prennent tous le menu à 15 F, ils dépensent 20 F de plus que ce coût. Quel est le nombre d'amis et le prix du menu moyen ?

12. MULTIPLES ET DIVISEURS D'UN NOMBRE. QUOTIENT EXACT

1. Multiples d'un nombre.

15 est un multiple de 5 parce que 15 est le produit du nombre entier 5 par le nombre entier 3.

On appelle multiple d'un nombre entier tout produit de ce nombre par un nombre entier.

Les nombres 4, 6, 8, 10, etc., sont des multiples de 2. On les appelle nombres pairs. Les nombres 7, 14, 21, 28, 35 sont des multiples de 7.

On peut représenter un multiple d'un nombre, 5 par exemple, par la notation $5\,k$, ou encore $5\,n$.

La suite — illimitée — des multiples de n s'écrit donc :

$$n \quad 2n \quad 3n \quad 4n \quad 5n \quad 6n\ldots$$

On peut encore écrire qu'un nombre est, par exemple, multiple de 5, et utilisant l'expression : mult. 5, mais on ne précise pas par quel nombre a été multiplié 5.

2. Quotient exact de deux nombres entiers.

Considérons les nombres entiers 21 et 7. Peut-on trouver un nombre entier dont le produit par 7 soit égal à 21 ?

Si ce nombre existe, c'est que 21 est multiple de 7. Formons donc les multiples successifs de 7 :

$$\underbrace{7\times 1}_{7} \quad \underbrace{7\times 2}_{14} \quad \underbrace{7\times 3}_{21} \quad \underbrace{7\times 4}_{28} \quad \underbrace{7\times 5}_{35} \quad \text{etc.}$$

Nous constatons que 21 est le produit de 7 par 3. Le nombre 3 répond à la question posée. On l'appelle le ***quotient exact*** de 21 par 7.

Le quotient exact de deux nombres a et b est un troisième nombre dont le produit par b est égal à a.

Désignons ce troisième nombre par x. Il est tel que :

$$\boxed{b \times x = a}$$

3. Division.

L'opération qui permet de trouver le quotient de a par b est une ***division***. La division de a par b s'écrit $a : b = x$.

Les relations $\boldsymbol{a : b = x}$ et $\boldsymbol{a = b \times x}$ sont donc équivalentes.

a est le dividende ; b, le diviseur ; x, le quotient exact.

La division exacte de a par b n'est pas toujours possible. Ainsi, si l'on divise 22 par 7, on n'obtient pas un quotient exact entier, mais un quotient approché que nous définirons et calculerons ultérieurement (35e leçon).

CAS PARTICULIERS. — *a*) Quand le dividende est nul et le diviseur non nul, le quotient est nul :

$0 : b = 0$ (parce que le produit d'un nombre quelconque *b* par zéro est toujours nul).

b) Quand le diviseur est nul et le dividende non nul, le quotient n'existe pas (le produit par zéro d'un nombre quelconque n'est, en effet, jamais égal à un nombre non nul).

c) Quand le diviseur est 1, le quotient est égal au dividende :

$$a : 1 = a \quad \text{(parce que } 1 \times a = a\text{)}.$$

d) Quand le diviseur est égal au dividende, le quotient est égal à 1 :

$$a : a = 1 \quad \text{(parce que } a \times 1 = a\text{)}.$$

4. Diviseurs d'un nombre.

21 étant un multiple de 7, le nombre 7 est un ***diviseur*** de 21. On dit aussi que 7 est un sous-multiple de 21.

Plus généralement, ***si a est un multiple de b, b est un diviseur (ou un sous-multiple) de a.***

On dit aussi que *a* ***est divisible par b.***

5. Division d'une somme ou d'une différence par un nombre.

1° Division d'une somme par un nombre. — Dans la leçon 5, nous avons établi (§ 2) que :

$$7 \times (3 + 9 + 2) = 21 + 63 + 14.$$

Cette relation, lue en commençant par son second membre :

$$21 + 63 + 14 = 7 \times (3 + 9 + 2),$$

montre que la somme $3 + 9 + 2$ est le quotient exact de la somme $21 + 63 + 14$ par 7.

Pour diviser une somme par un nombre, on peut, quand c'est possible, diviser chaque terme de la somme par ce nombre et ajouter les résultats obtenus.

$$\boxed{(a + b + c) : n = (a : n) + (b : n) + (c : n)}$$

APPLICATIONS. — *au calcul numérique :*

$$(35 + 25 + 45) : 5 = 7 + 5 + 9 = \mathbf{21}.$$

— *au calcul mental.*

Soit à calculer : 335 : 5. On décompose 335 en : $300 + 35$ et l'on divise chacun de ces termes par 5. On obtient : $60 + 7 = 67$.

2° Division d'une différence par un nombre. — Dans la leçon 10, nous avons établi (§ 2) que :

$$5 \times (8 - 5) = 40 - 25, \qquad \text{ou} \qquad 40 - 25 = 5 \times (8 - 5).$$

De cette relation, on déduit que la différence $8 - 5$ est le quotient exact de la différence $40 - 25$ par 5.

Pour diviser une différence par un nombre, on peut, quand c'est possible, diviser chaque terme de la différence par ce nombre, puis soustraire le second quotient du premier.

$$\boxed{(a - b) : n = (a : n) - (b : n)}$$

APPLICATIONS. — *au calcul numérique :*

$$(63 - 42) : 7 = (63 : 7) - (42 : 7) = 9 - 6 = \mathbf{3}.$$

— *au calcul mental :*

297 : 3. On peut considérer que : 297 = 300 — 3 ; divisons chaque terme de la différence par 3. On obtient : 100 — 1 = 99.

6. Division d'un polynôme arithmétique par un nombre.

Puisque :

$$2 \times (7 - 5 + 3) = 14 - 10 + 6 \quad \text{ou} \quad 14 - 10 + 6 = 2 \times (7 - 5 + 3),$$

le quotient de 14 — 10 + 6 par 2 est 7 — 5 + 3.

Pour diviser un polynôme arithmétique par un nombre, on peut diviser, quand c'est possible, chaque terme de ce polynôme par ce nombre et conserver à chacun des quotients exacts le signe du terme correspondant du polynôme.

EXEMPLE :

$$(96 - 56 - 32 + 72) : 8 = 12 - 7 - 4 + 9 = \mathbf{10}.$$

CONSÉQUENCES. — ***1° Tout nombre qui divise plusieurs autres divise leur somme.***

4 divise 28, 12 et 16. Il divise leur somme : 28 + 12 + 16 = 56.

2° Tout nombre qui divise deux autres divise leur différence.

5 divise 50 et 35. Il divise leur différence : 50 — 35 = 15.

3° Tout nombre qui divise tous les termes d'un polynôme arithmétique divise ce polynôme.

2 divise 18, 12 et 10. Il divise : 18 + 12 — 10 = 20.

7. Mise en facteur.

Considérons le polynôme 14 — 10 + 6. Tous ses termes sont divisibles par 2. On peut l'écrire sous la forme :

$$14 - 10 + 6 = 2 \times (7 - 5 + 3).$$

On a ainsi transformé un polynôme en un produit de deux facteurs. L'un de ces facteurs, que l'on appelle le facteur commun, est ici 2. L'autre est le polynôme résultant de la division du polynôme donné par le facteur commun :

$$\boxed{an + bn - cn = n\,(a + b - c)}$$

APPLICATIONS :

a) *au calcul numérique :*

$$153 + 51 - 68 - 34 = 17 \times (9 + 3 - 4 - 2) = 17 \times 6 = \mathbf{102}.$$

b) *au calcul mental :*

$$320 - 180 = (32 - 18) \times 10 = 14 \times 10 = \mathbf{140}.$$

c) *au calcul littéral :*

$$5\,a + 3\,a - 2\,a = a\,(5 + 3 - 2) = 6\,a$$

$$8\,x^2 - 3\,x^2 + 7\,x^2 = x^2\,(8 - 3 + 7) = 12\,x^2.$$

EXERCICES

288. Écrire les multiples de 7 inférieurs à 100.

289. Écrire les diviseurs de 60.

290. On sait que $480 = 2 \times 20 \times 12$. Calculer rapidement le quotient de 480 par 12, le quotient de 480 par 40.

291. On sait que $A = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$. Sans calculer A, trouver son quotient par 6, par 21, par 55, par 42.

292. Le nombre B est égal à $21 \times 12 \times 28$. Sans calculer B, trouver son quotient par 42, par 36, par 56.

293. Montrer que les produits suivants sont des multiples de 3×11 (ou 33) :

6×22 $\qquad$ 15×77 $\qquad$ 21×88.

294. Que devient le quotient d'une division exacte quand on multiplie le dividende par 5?

295. Que devient le quotient d'une division exacte quand on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre?

296. On divise par 2 le diviseur pair d'une division exacte. Que devient le quotient?

297. Que devient le quotient d'une division exacte quand on multiplie par 6 le dividende et par 3 le diviseur?

298. On multiplie par 10 le dividende d'une division exacte et on divise par 5 le diviseur (supposé être multiple de 5). Que devient le quotient?

299. On divise *a* par *b* et l'on trouve 25 pour quotient. La somme des nombres *a* et *b* est 442. Trouver ces deux nombres.

300. On divise *a* par *b* et l'on trouve 23 pour quotient. La différence entre *a* et *b* étant 814, trouver ces deux nombres.

301. Le quotient exact de deux nombres *a* et *b* est 27. On retranche le diviseur du dividende. La différence est-elle multiple de 27? du diviseur? Trouver *a* et *b* quand la différence vaut 390.

302. *x* étant un nombre entier, écrire les 7 premiers multiples de *x*. Calculer leur somme. Déterminer *x* quand cette somme vaut 140.

303. On divise un nombre par 15; ce nombre diminue de 154. Quel était-il?

304. Compléter les multiplications suivantes :

2 731	7 41.	43.	23 545
. ...	. .05	.15	..7
21 848	37 090	2 18.	... ...
81 93	2 225 40	4 .7	1 883 60
1 365 5	. .... .	.. 4	. ... .
10 924		93 955	6 757 415
.. ..	17 098 490		

305. Reconstituer les divisions :

22 032	...	51 218	...
2 59.	.8	.. ..	..4
000		1 778	
		130	

13. MULTIPLES ET DIVISEURS D'UN NOMBRE (suite)

I. Produit d'un multiple d'un nombre par un entier.

Considérons un multiple quelconque de 5, par exemple 5×3 ou 15. Multiplions 15 par un autre nombre, par exemple 7. Nous obtenons un nombre N égal à 105, qui peut s'écrire :

$$N = (5 \times 3) \times 7 \quad \text{ou} \quad N = 5 \times (3 \times 7).$$

Cette dernière forme exprime que N est un multiple de 5. Donc :

Le produit d'un multiple d'un nombre a par un nombre entier est un multiple de a.

EXEMPLE. 36 étant un multiple de 9, le produit de 36 par 7, ou 252, est multiple de 9. On écrit plus simplement cette propriété sous la forme : 36 est multiple de 9, donc $36 \times 7 = 252$ est multiple de 9.

Inversement, 15 étant un diviseur de 105 et 5 un diviseur de 15, le nombre 5 est aussi un diviseur de 105. Donc :

Tout nombre qui divise un autre nombre divise les multiples de cet autre.

CONSÉQUENCES. — 1° *Tout nombre qui divise un facteur d'un produit divise ce produit.* Ainsi, dans le produit 5×21, le nombre 3 divise 21, donc il divise ce produit qui est un multiple de 21 et qui est égal à 105.

2° Parce que 585 est égal à 45×13 et que 45 est un multiple de 5, le nombre 585 peut être décomposé en un produit de trois facteurs :

$$585 = 5 \times 9 \times 13 \quad \text{ou} \quad 585 = 5 \times (9 \times 13).$$

Cette relation exprime que 9×13 est le quotient exact de 585 par 5.

$$585 : 5 = 9 \times 13 \quad \text{ou} \quad 585 : 5 = (45 : 5) \times 13.$$

Pour diviser un produit de facteurs par un nombre, on peut, quand c'est possible, diviser L'UN DES FACTEURS par ce nombre.

APPLICATIONS. — a) *numériques :*

$$(28 \times 5 \times 11) : 4 = 7 \times 5 \times 11.$$
$$(32 \times 8 \times 6) : 2 = 16 \times 8 \times 6 \quad \text{(et non : } 16 \times 4 \times 3\text{)}.$$

b) *littérales :*

$$(15\,x \times 7) : 3 = (15 : 3) \times x \times 7 = 5 \times x \times 7 = 5\,x \times 7 = 35\,x$$

Mais : $(18\,a + 8) : 2 = (18\,a : 2) + (8 : 2) = 9\,a + 4$

$$(18\,a - 12\,b) : 6 = (18\,a : 6) - (12\,b : 6) = 3\,a - 2\,b.$$

3° Tout nombre qui divise un autre nombre divise les puissances de cet autre nombre.

EXEMPLE. 7 est un diviseur de 14, donc 7 est un diviseur de 14^3 (ou 2 744).

2. Quotient de deux puissances d'un même nombre.

Nous avons établi (3e leçon, § 8) que :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

a^n est donc le *quotient exact* de a^{m+n} par a^m.

Ainsi, parce que $a^3 \times a^2 = a^5$, a^2 est le *quotient exact* de a^5 par a^3 :

$$a^5 : a^3 = a^2.$$

Le quotient d'une puissance d'un nombre par une puissance d'un même nombre est égal, quand la division est possible, à une puissance de ce même nombre dont l'exposant est égal à la différence des exposants des puissances données.

$$\boxed{a^p : a^m = a^{p-m}} \qquad (p - m \geqslant 0)$$

3. Division d'un nombre par un produit de facteurs.

Soit à diviser 1 320 par le produit $3 \times 5 \times 11$.

Divisons 1 320 par 3, le quotient est 440 ; $1\,320 = 3 \times 440$ (1)

Divisons 440 par 5, le quotient est 88 ; $440 = 5 \times 88$

Divisons 88 par 11, le quotient est 8 ; $88 = 11 \times 8.$

Or, l'égalité (1) peut s'écrire successivement :

$$1320 = 3 \times 440 = 3 \times 5 \times 88 = 3 \times 5 \times 11 \times 8 = (3 \times 5 \times 11) \times 8.$$

Cette dernière relation montre que 8 est le quotient de 1 320 par le produit $3 \times 5 \times 11$ et que ce quotient peut s'obtenir par divisions successives.

Pour diviser un nombre par un produit de facteurs, on peut, quand les divisions se font exactement, diviser ce nombre par le premier facteur, le quotient obtenu par le deuxième facteur et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les facteurs soient épuisés.

APPLICATIONS.

1° Au calcul numérique :

$$720 : (2 \times 5 \times 6) = 360 : (5 \times 6) = 72 : 6 = \mathbf{12}.$$

$$(8 \times 15 \times 7) : (2 \times 3) = \mathbf{4} \times \mathbf{5} \times \mathbf{7}.$$

Dans ce deuxième exemple, on a divisé le premier produit par 2, donc 8 par 2, puis le premier produit par 3, donc 15 par 3, etc.

2° Au calcul littéral :

$10\,a : 2\,a = 5$ | $40\,axy : 8\,a = 5\,xy.$

EXERCICES

Effectuer mentalement les divisions suivantes :

306. 168 : 6 — 128 : 8 — 324 : 9 — 375 : 15.

307. 162 : 6 — 392 : 8 — 351 : 9 — 528 : 12.

Effectuer les divisions suivantes :

308. $(12 \times 5 \times 7) : 2$ $(21 \times 12 \times 5) : 3$ $(11 \times 15 \times 7) : 3$.

309. $8\,a : 2$ $16\,ab : 4$ $21\,x : 7$.

310. $24\,x : 6$ $18\,ab : a$ $35\,xy : 5$.

311. $(24\,a + 12\,b + 15) : 3$ $(66\,a - 36\,b) : 6$ $(125\,x - 75\,y) : 25$.

312. $(64\,x - 40\,y + 16) : 8$ $(96\,x - 48\,y + 36) : 12$ $(15\,x + 7\,x - 9\,x) : x$.

313. Comment divise-t-on mentalement un nombre par 12? par 22? Justifier le procédé employé.

Effectuer les divisions suivantes :

314. $156 : (3 \times 4)$ $495 : (3 \times 11)$ $828 : (3 \times 6)$ $462 : (3 \times 7)$.

315. $18\,a : 3\,a$ $42\,xy : 7\,x$ $55\,ax : 5\,a$ $72\,abc : 8\,ab$.

316. On divise par 3 les deux dimensions d'un rectangle. Que devient sa surface ?

317. On divise par 2 les trois dimensions d'un parallélipipède rectangle. Que devient son volume?

318. On divise par 2 l'arête d'un cube. Que devient son volume?

319. Ayant à diviser un produit de trois facteurs pairs par 2, un élève divise tous les facteurs par 2. Il trouve 84 pour résultat. Quel est le résultat exact?

320. Calculer :

$7^5 : 7^3$ $5^3 : 5^4$ $5^4 : 5^3$ $a^7 : a^5$ $a^7 : a^7$.

321. Calculer :

$12\,a^5 : 2\,a^2$ $30\,x^4 : 15\,x^3$ $18\,x^2 : 9\,x^2$ $15\,a^3 : 15\,a^2$.

322. Calculer x tel que :

$x \times 5 = 30$ $x : 15 = 2$ $7 \times x = 56$

$x \times 8 = 40$ $54 : x = 6$ $x : 4 = 9$.

323. Calculer un nombre x tel que :

$x \times 7 \times 4 = 140$ $(20 : x) \times 8 = 40$ $(60 : x) : 3 = 5$.

Effectuer mentalement les divisions suivantes :

324. 105 : 5 945 : 15 1 236 : 6 832 : 8.

325. 275 : 5 630 : 3 763 : 7 1 872 : 6.

Calculer de deux manières différentes les quotients suivants :

326. $(32 + 28 + 40) : 4$ $(150 + 75 + 30) : 15$ $(57 + 48 + 21) : 3$.

327. $(48 - 32) : 8$ $(88 - 33) : 11$ $(72 - 24) : 12$.

328. $(81 - 51 + 12) : 3$ $(96 - 40 - 16) : 8$ $(180 + 240 - 144) : 12$.

Mettre les polynômes suivants sous la forme d'un produit de facteurs :

329. $15 + 12 - 6$ $35 - 25 + 15$ $48 + 32 - 24 - 8$.

330. $21\,x + 14\,x - 28$ $60\,a - 30\,a + 20$ $75\,x + 60 - 45\,x - 30$.

331. $7\,x - 5\,x + 2\,x$ $11\,m - 8\,m + 5\,m$ $121\,x - 77\,x + 22\,x + 33$.

332. On divise 315 par 15. Du dividende, on retranche un multiple du diviseur, par exemple 8 fois 15 ou 120. Montrer que la division du nouveau dividende par 15 se fait encore exactement.

333. Vous avez divisé 7 218 par 9 au lieu de diviser 7 281 par 9. Rectifier le quotient sans refaire la seconde division.

334. Exprimer trois nombres consécutifs en fonction du nombre médian x. Trouver trois nombres consécutifs dont la somme est 102.

14. QUOTIENT DE DEUX NOMBRES A UNE UNITÉ PRÈS

I. Quotient approché, à une unité près, de deux nombres entiers.

1° Considérons les nombres 23 et 7 et cherchons dans la liste des *multiples* de 7 :

7 14 21 28 35 42 49 56 ....

si le nombre 23 y figure.

23 n'y figure pas. Toutefois, dans la suite naturelle des nombres, 23 se place entre le 3ᵉ et le 4ᵉ multiple de 7, c'est-à-dire entre le nombre 7×3 ou 21, et le nombre 7×4, ou 28. Il est supérieur au premier de ces nombres et inférieur au second. Cette constatation s'écrit sous la forme de la double inégalité :

$$7 \times 3 < 23 < 7 \times 4.$$

On convient de dire que 3 est le ***quotient approché, à une unité près par défaut,*** de 23 par 7.

2° ***Plus généralement,*** considérons deux nombres a et b, tels que $a > b$ et $b \neq 0$, et dressons la liste des multiples de b :

$$b, \quad 2b, \quad 3b, \quad 4b, \quad 5b, \ldots, \quad qb, \quad (q+1)b, \ldots, \ nb\ldots$$

Deux cas peuvent se présenter :

a) a est un nombre de la suite, par exemple qb. Le nombre q est alors le ***quotient exact*** de a par b (12ᵉ leçon, § 2), et :

$$\boxed{b \times q = a.} \qquad (1)$$

b) En général, a se place *entre* deux multiples de b, par exemple entre qb et $(q+1)b$, ce qu'exprime la double inégalité :

$$\boxed{b \times q < a < b \times (q+1)} \qquad (2)$$

q est alors le ***quotient à une unité près par défaut*** de a par b.

Le quotient approché à une unité près par défaut d'un nombre entier a par un nombre entier b est le plus grand nombre entier q dont le produit par b soit inférieur à a.

REMARQUES. — Les relations (1) et (2) peuvent être réunies sous la forme :

$$\boxed{b \times q \leqslant a < b \times (q+1)} \qquad (3)$$

q est alors le ***quotient entier*** de a par b ; il peut être ***exact*** (cas de $b \times q = a$), ou ***approché*** (cas de $b \times q < a$).

L'opération qui permet de calculer le quotient entier de a par b est une division ; a est le *dividende*, b est le *diviseur*.

2. Reste de la division.

Dans la division de 23 par 7, dont le quotient entier est 3, la différence entre le dividende 23 et le produit du diviseur par le quotient 7×3 (ou 21) est égale à 2. Le nombre 2 est le ***reste*** de la division de 23 par 7.

Plus généralement, ***la différence entre le dividende*** a ***et le produit*** $b \times q$ ***du diviseur par le quotient est égale à :*** $a - b \times q$.

On l'appelle le ***reste :***

$$r = a - b \times q.$$

D'après la 8e leçon (§ 2), cette relation peut également s'écrire :

$$a = b \times q + r.$$

Le reste est toujours inférieur au diviseur b. En effet, de la définition du quotient entier, il résulte que le reste est inférieur à la différence des deux multiples consécutifs de b entre lesquels s'insère le dividende ; or cette différence est b. Donc :

$$r < b.$$

Le dividende, le diviseur, le quotient et le reste sont ainsi liés par les relations suivantes :

$$\boxed{\boldsymbol{a = b \times q + r \qquad\qquad r < b}} \qquad (4)$$

Les relations (4) sont équivalentes aux relations (3).

3. Pratique de la division.

1er. ***cas.*** — *Le diviseur et le quotient ont un seul chiffre.* EXEMPLE : 47 : 8.

Puisque l'on connaît, par cœur, le produit de deux nombres d'un chiffre, on sait que 47 est compris entre 8×5 et 8×6 :

$$8 \times 5 < 47 < 8 \times 6.$$

Le quotient de 47 par 8 est donc 5 et le reste 7.

2e ***cas.*** — *Le diviseur est quelconque ; le quotient a un seul chiffre.*

EXEMPLE : 139 : 32.

Le quotient n'a qu'un seul chiffre puisque le produit $32 \times 10 = 320$ est supérieur au dividende 139.

Problème. — Partager 139 cahiers entre 32 élèves.

S'il n'y avait que 30 élèves, nous pourrions, après avoir formé 3 groupes de 10 élèves, distribuer 1 cahier à chaque élève, ce qui reviendrait à donner 1 dizaine à chaque groupe. Puisque l'on dispose de 13 dizaines de cahiers, on obtiendra le nombre de cahiers à donner à chaque élève en divisant 13 par 3. Le quotient entier de 13 par 3 est 4. Mais il faut s'assurer, en tenant compte du nombre des élèves 32, que le produit de 32 par 4 n'est pas supérieur à 134. Or :

$$32 \times 4 = 128.$$

4 est donc le quotient de 139 *par* 32. *Le reste est* $139 - 128 = 11$.

139	32
11	4

Si le produit du diviseur par le nombre obtenu en divisant les dizaines du dividende par celles du diviseur est supérieur au dividende, on diminue le nombre obtenu de 1 unité. Ce nouveou nombre convient si son produit par le diviseur n'est pas supérieur au dividende ; dans le cas contraire, on diminue de 1 unité le nombre que l'on vient " d'essayer ", etc...

3e cas. — Le quotient a plusieurs chiffres.

EXEMPLE : *7 923 : 32.*

Le quotient a plusieurs chiffres, car le produit de 32 par 10, ou 320, est inférieur au dividende.

PROBLÈME. — *Partager 7 923 F entre 32 personnes.*

7 923 étant compris entre 32 × 100 et 32 × 1 000, chaque personne aura plus de 100 F et moins de 1 000 F. Le quotient cherché a donc trois chiffres.

1° Recherche du chiffre des centaines. — Supposons que la somme à partager soit constituée par 79 billets de 100 F, 2 billets de 10 F et 3 pièces de 1 F.

79	32
15	2

Le nombre de billets de 100 F que nous pouvons donner à chaque personne est le quotient de 79 par 32, soit 2 (2e cas).

2 est le chiffre des centaines. Il reste 15 billets de 100 F que nous ne pouvons distribuer sous cette forme.

2° Recherche du chiffre des dizaines. — Échangeons les 15 billets de 100 F qui restent contre des billets de 10 F. Nous disposons ainsi de 150 billets de 10 F qui, ajoutés aux 2 billets que nous possédions, donnent un total de 152 billets à partager.

152	32
24	4

Nous pouvons donner à chaque personne 4 billets de 10 F (2e cas). 4 est le chiffre des dizaines. Il reste 24 billets de 10 F que nous ne pouvons distribuer sous cette forme.

243	32
19	7

3° Recherche du chiffre des unités. — Échangeons les 24 billets de 10 F qui restent contre des pièces de 1 F. Nous obtenons 240 pièces de 1 F qui, ajoutées aux 3 pièces que nous possédions déjà, donnent un total de 243 pièces à partager. Nous pouvons donner, à chaque personne, 7 pièces de 1 F (2e cas).

7 est le chiffre des unités. Il reste 19 F.

Unités
Dizaines
Centaines

79.23	32
15 2	247
2 43	
19	

Les trois divisions partielles que nous avons faites sont réunies, dans la pratique, sous la forme indiquée ci-contre.

Le quotient est 247 et le reste 19.

EXERCICES

335. Dans une division, le diviseur est 5, le quotient 12, le reste 3. Trouver le dividende.

336. Le dividende d'une division est 243, le quotient 14, le reste 5. Trouver le diviseur.

337. Effectuer la division à 1 unité près de 764 par 23. De combien d'unités peut-on augmenter le dividende sans changer le quotient? De combien pourrait-on le diminuer?

338. Un nombre x est tel que : $11 \times 21 < x < 11 \times 23$. Que peut-on dire du quotient approché à 1 unité près de x par 11?

339. L'égalité $715 = 31 \times 23 + 2$ exprime-t-elle la division de 715 par 31 et la division de 715 par 23? En serait-il de même de l'égalité $740 = 31 \times 23 + 27$?

340. Le reste d'une division est 7, le diviseur 23. Quel est le plus petit nombre qu'il faut ajouter au dividende pour qu'il n'y ait plus de reste? Que devient alors le quotient?

341. Écrire l'égalité exprimant la division de 335 par 26. Comment, sans faire de nouvelle division, trouver le quotient de 335 par 12?

342. Trouver les nombres inférieurs à 200 qui peuvent servir de dividende et de diviseur à une division donnant pour quotient 5 et pour reste 30.

343. Quelles sont les valeurs de a et de b qui satisfont à l'égalité $185 = 11\,a + b$? On trouve différents couples de nombres. Quel est le couple de nombres qui est le seul à exprimer la division de 185 par 11?

344. Trouver deux nombres dont la somme est 707 sachant que, si l'on divise le plus grand par le plus petit, on obtient 21 pour quotient et 3 pour reste.

345. Trouver deux nombres sachant que leur différence est 267 et qu'en divisant le plus grand par le plus petit on obtient 16 pour quotient et 12 pour reste.

346. Le dividende, le diviseur, le quotient et le reste d'une division valent en tout 155. Trouver le dividende et le diviseur, sachant que le quotient est 18 et le reste 2.

347. Dans une division, on trouve 15 pour quotient et 1 pour reste. On ajoute 68 au dividende : on trouve 18 pour quotient et un reste nul. Trouver le dividende initial et le diviseur (Ramener au cas de deux divisions exactes).

348. On divise un nombre par 25, le reste est 9. On divise le même nombre par 29; on obtient le même quotient et le reste est 1. Trouver ce nombre. Quel est le quotient commun? (Ramener au cas de deux divisions exactes et chercher quelle serait la différence des nouveaux dividendes.)

349. Un nombre est égal à un multiple de 6, augmenté de 15. Quel est le reste de sa division par 6? par 3? par 2?

350. On divise D par d : le quotient est q et le reste r. On augmente de 72 le dividende et de 8 le diviseur. Le quotient et le reste ne changent pas. Trouver le quotient.

351. On divise un nombre entier par 29 et le reste de la division est égal au quotient entier. Quel doit être le dividende pour que ce fait puisse se produire?

352. Trouver les nombres qui, divisés par 7, donnent un quotient égal au triple du reste.

353. On divise un nombre a par 11 : le quotient est 7 et le reste 3. On multiplie le nombre a par 5 sans toucher au diviseur. Que devient le quotient? Justifier. Si le reste de la première division avait été 2, le quotient aurait-il été modifié?

354. On divise par 7 le dividende 112 et le diviseur 35 d'une division. Que deviennent le quotient et le reste? Même exercice en remplaçant 112 par D et 35 par d.

355. Vous divisez par 5 le diviseur de la division 528 : 35, sans toucher au dividende. Que devient le quotient? Justifier. En serait-il de même si le dividende avait été 538. Pourquoi?

356. On divise A par 8 : le quotient est q et le reste 5. On divise un autre nombre B par 8 : le quotient est q' et le reste 2. On divise ensuite la somme A + B par 8 : quelle est la valeur du quotient? Quelle serait la valeur de ce quotient si le reste de la division de B par 8 était 6?

357. Reconstituer les divisions suivantes (en remplaçant les points par des chiffres) :

4 0246	413
....	.7
185	

5 641	..
. ..	..5
12.	
6	

CHAPITRE II

DIVISIBILITÉ

Classe de Cinquième des Lycées et Collèges.

15. Divisibilité par 2 et 5 ; par 4 et 25.

16. Divisibilité par 9 et par 3.

17. Multiples communs et diviseurs communs à deux ou plusieurs nombres.

Classe de Quatrième des Lycées et Collèges.

18. Nombres premiers.

19. Décomposition d'un nombre en un produit de facteurs premiers.

20. Recherche des diviseurs d'un nombre.

21. Plus grand commun diviseur.

22. Plus petit commun multiple.

23. Nombres premiers entre eux.

15. DIVISIBILITÉ PAR 2 ET 5, PAR 4 ET 25

1. Introduction.

La recherche d'un *caractère de divisibilité,* c'est-à-dire d'une règle permettant de reconnaître, *sans faire la division*, si cette division se fait exactement, repose sur la propriété étudiée dans la 13e leçon, § 1 : ***tout diviseur d'un nombre divise les multiples de ce nombre,*** et sur le théorème suivant :

Le reste de la division par a d'un nombre N ne change pas quand on diminue N d'un multiple de a.

DÉMONSTRATION SUR L'EXEMPLE : N = 129 ; $a = 7$.

Divisons 129 par 7 :

$$129 = 7 \times 18 + 3 \qquad 3 < 7.$$

Retranchons de 129 un multiple de 7, par exemple 42 (ou 7 × 6) :

$$129 - 42 = (7 \times 18 + 3) - (7 \times 6)$$
$$129 - 42 = 7 \times 18 - 7 \times 6 + 3$$
$$129 - 42 = 7 \times (18 - 6) + 3$$
$$\mathbf{129 - 42 = 7 \times 12 + 3 \qquad 3 < 7}$$

En divisant 129 — 42 par 7, on obtient *le même reste* (3) qu'en divisant 129 par 7.

Plus généralement, si $N = a \times q + r$ et $r < a$,

nous avons :

$$N - ma = a \times (q - m) + r \quad \text{et} \quad r < a.$$

2. Divisibilité par 2 et par 5.

1° Divisons par 10 un nombre quelconque, 359 par exemple :

$$359 = 10 \times 35 + 9 \qquad 9 < 10.$$

Le reste de la division d'un nombre par 10 est donc égal à son chiffre des unités. Par suite :

Les seuls nombres divisibles par 10 sont ceux dont le chiffre des unités est zéro.

2° Les nombres 2 et 5 divisant 10, divisent tous les multiples de 10 (§ 1 de la 13e leçon), donc tous *les nombres terminés par zéro* sont des multiples de 2 et de 5.

3° Examinons le cas d'un nombre N, non terminé par zéro :

$$N = 10 \times q + u \qquad u < 10 \qquad (u, \text{ chiffre des unités}).$$

Puisque 10 × q est un multiple de 2 (et de 5), les restes des divisions par 2 (ou 5) de N et de u sont *les mêmes* (théorème 1).

Donc :

1° Si u est égal à 2, ou 4, ou 6, ou 8 (chiffres pairs), le nombre N est divisible par 2.

2° Si u est égal à 5, le nombre N est divisible par 5.

D'où les caractères de divisibilité :

Les seuls nombres divisibles par 2 sont les nombres terminés par zéro ou par un chiffre pair.

Les seuls nombres divisibles par 5 sont les nombres terminés par zéro ou par 5.

EXEMPLES :

430 218 10 246
sont divisibles par 2 (nombres pairs).
135 2 013 42 619
ne sont pas divisibles par 2
(nombres impairs).

810 235 7 000
sont divisibles par 5.
137 1 206 12 438
ne sont pas divisibles par 5.

3. Divisibilité par 4 et par 25.

1° Divisons par 100 un nombre quelconque, 2 457 par exemple :

$$2\,457 = 100 \times 24 + 57 \qquad 57 < 100.$$

Le reste de la division d'un nombre par 100 est donc égal au nombre formé par ses deux chiffres de droite et, par suite :

Les seuls nombres divisibles par 100 sont ceux dont les deux chiffres de droite sont des zéros.

2° Les nombres 4 et 25, qui sont des diviseurs de 100, divisent également les multiples de 100 (13e leçon, § 1), c'est-à-dire les nombres dont *les deux chiffres de droite sont des zéros.*

3° Examinons le cas d'un nombre N, dont les deux chiffres de droite ne sont pas des zéros :

$$N = 100 \times q + r \qquad r < 100.$$

Puisque $100 \times q$ est un multiple de 4 et 25, les restes des divisions par 4 (ou 25) de N et de r sont *les mêmes* (théorème du § 1).

Remarquons que r est un nombre de deux chiffres au plus, car il est inférieur à 100.

1° Si le nombre r est divisible par 4, le nombre N est aussi divisible par 4.

2° Si le nombre r est divisible par 25 (donc égal à 25, ou 50, ou 75), le nombre N est aussi divisible par 25.

D'où les caractères de divisibilité :

Les seuls nombres divisibles par 4 sont les nombres terminés par deux zéros ou par un nombre de deux chiffres divisible par 4.

Les seuls nombres divisibles par 25 sont les nombres terminés par deux zéros ou par 25, 50 et 75.

EXEMPLES :

704 1 700 536
sont divisibles par 4.
135 210 182
ne sont pas divisibles par 4.

1 500 625 3 050
sont divisibles par 25.
732 815 6 740
ne sont pas divisibles par 25.

EXERCICES

358. Trouver, sans faire les divisions, les restes des divisions par 2 et 5 des nombres :

243 639 815 1 024 5 733 10 241.

359. Trouver, sans faire les divisions, les restes des divisions par 4 et 25 des nombres :

614 1 001 8 024 7 675 10 002 7 826.

360. Un nombre s'écrit 1 57*u*, le chiffre *u* des unités étant inconnu. Par quel chiffres peut-on remplacer *u* pour que ce nombre soit divisible par 2 ? par 4 ? par 5 ? par 25 ?

361. On donne le nombre 51 905. Quel chiffre faut-il mettre à la place du zéro pour que le nombre obtenu soit divisible par 25 ?

362. Un nombre s'écrit 37*du* (*d* chiffre des dizaines, *u* celui des unités). La somme de ses chiffres est 19 et le nombre est divisible par 4. Trouver ce nombre.

363. Démontrer que la somme (et la différence) de deux nombres pairs ou de deux nombres impairs est toujours divisible par 2.

364. Montrer que le produit de deux nombres entiers consécutifs est divisible par 2.

365. Montrer que, de deux nombres pairs consécutifs, un seul est divisible par 4.

366. 10 est multiple de 4, plus 2. Déduire de là qu'un nombre est divisible par 4 lorsque la somme du chiffre des unités et du double du chiffre des dizaines est divisible par 4.

367. Rechercher, en s'inspirant de la leçon, les caractères de divisibilité par 8 et par 125 ($1\,000 = 8 \times 125$).

368. On donne le nombre 3 *c*25 (*c* est le chiffre des centaines). Pour quelles valeurs de *c* ce nombre est-il divisible par 125 ?

369. On donne le nombre 9 *cd*5 (*c* est le chiffre des centaines et *d* celui des dizaines). Pour quelles valeurs de *c* et de *d* ce nombre est-il divisible par 125 ?

370. Un nombre a, qui n'est pas multiple de 5, est de la forme mult. 5 ± 1 ou mult. 5 ± 2. Montrer que a^2 est mult. 5 ± 1.

16. DIVISIBILITÉ PAR 9 ET PAR 3

1. Divisibilité par 9.

1° Examinons d'abord les restes des divisions par 9 des puissances de 10 :

$$10 = 9 + 1$$
$$100 = 99 + 1 = 9 \times 11 + 1$$
$$1\,000 = 999 + 1 = 9 \times 111 + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le reste de la division par 9 d'une puissance de 10 est égal à 1.

2° Calculons le reste de la division par 9 d'un nombre formé par un seul chiffre significatif suivi de zéros, par exemple 7 000 :

$$7\,000 = 1\,000 \times 7 = (\text{mult. } 9 + 1) \times 7$$
$$7\,000 = \text{mult. } 9 + 7.$$

Le reste de la division par 9 d'un nombre formé par un chiffre significatif suivi de zéros est égal à ce chiffre.

3° Cherchons le reste de la division par 9 d'un nombre quelconque et, pour cela, décomposons-le en la somme des valeurs relatives de ses chiffres.

Considérons le nombre : $6\,524 = 6\,000 + 500 + 20 + 4$.
Appliquons à chaque terme de la somme le résultat obtenu au § 2° ci-dessus :

$$6\,524 = (\text{mult. } 9 + 6) + (\text{mult. } 9 + 5) + (\text{mult. } 9 + 2) + 4$$
$$6\,524 = \text{mult. } 9 + (6 + 5 + 2 + 4)$$
$$\mathbf{6\,524 = mult.\ 9 + 17.}$$

Le reste de la division par 9 de 6 524 est donc (théorème 1, 15[e] leçon) le même que le reste de la division par 9 de la somme de ses chiffres qui est égal à 17.

Plus généralement :

Le reste de la division par 9 d'un nombre est égal au reste de la division par 9 de la somme de ses chiffres.

D'où il résulte que :

Les seuls nombres divisibles par 9 sont ceux dont la somme des chiffres est divisible par 9.

EXEMPLES : 7 848 est divisible par 9, car la somme $7 + 8 + 4 + 8 = 27$ est divisible par 9 ; 6 524 n'est pas divisible par 9, car la somme $6 + 5 + 2 + 4 = 17$ n'est pas divisible par 9.

2. Divisibilité par 3.

Puisque 3 est un diviseur de 9, l'égalité établie au paragraphe précédent :

$$6\,524 = \text{mult. } 9 + 17$$

entraîne l'égalité :

$$6\,524 = \text{mult. } 3 + 17.$$

Le reste de la division d'un nombre par 3 est égal au reste de la division par 3 de la somme de ses chiffres.

Il en résulte que :

Les seuls nombres divisibles par 3 sont ceux dont la somme des chiffres est divisible par 3.

EXEMPLES : 915 est divisible par 3, car la somme $9 + 1 + 5 = 15$ est divisible par 3 ; 8 003 n'est pas divisible par 3, car la somme $8 + 3 = 11$ n'est pas divisible par 3.

3. Remarques.

1° Si un nombre est divisible par 9, il l'est par 3 ; mais, si un nombre est divisible par 3, *il peut ne pas être divisible par 9.*

Par exemple, 615 est divisible par 3 et non par 9.

2° Bien que les règles permettant de calculer les restes des divisions par 9 et par 3 d'un nombre soient analogues, *ces restes peuvent être différents.*

Par exemple, 2 815, divisé par 9, donne 7 pour reste et, divisé par 3, donne 1 pour reste.

3° Cherchons le reste par 9 de 387 875. La somme des chiffres est 38. Le reste cherché est donc celui de la division de 38 par 9. *Il est aussi égal au reste de la division par 9 de la somme des chiffres de 38. La somme de ces chiffres étant 11, le reste est 2.*

4. Preuve par 9 des opérations.

1° Multiplication.

EXEMPLE. Faisons la preuve par 9 de la multiplication : $908 \times 78 = 70\,824$.

$$\begin{aligned} 908 \times 78 &= (\text{mult. } 9 + 8) \times (\text{mult. } 9 + 6) \\ &= \text{mult. } 9 + 8 \times \text{mult. } 9 + 6 \times \text{mult. } 9 + 48 \\ &= \text{mult. } 9 + \text{mult. } 9 + 3 \\ 908 \times 78 &= \text{mult. } 9 + \mathbf{3}. \end{aligned}$$

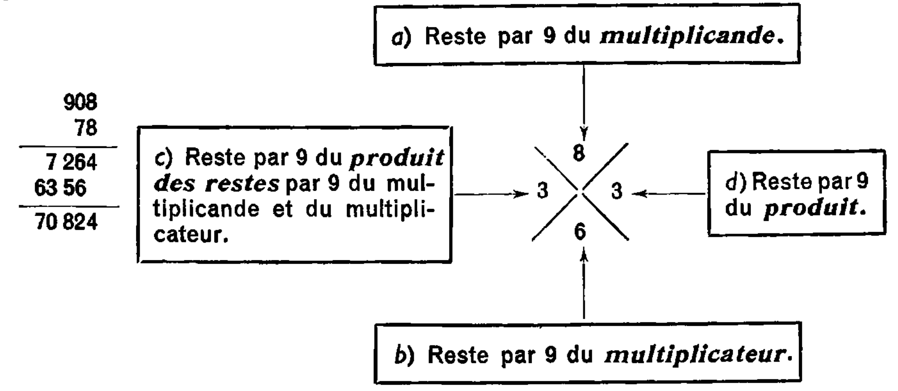
En cherchant le reste de la division par 9 du produit, on doit donc trouver 3 : *c'est ce qu'il faut vérifier.*

Or, on a bien :

$$70\,824 = \text{mult. } 9 + (7 + 8 + 2 + 4) = \text{mult. } 9 + 21 = \text{mult. } 9 + \mathbf{3}.$$

L'opération est donc, en principe, exacte.

Pratiquement, on dispose ainsi l'opération, les restes étant calculés, en général, dans l'ordre *a*, *b*, *c*, *d* :



2° Division.

EXEMPLE. Faisons la preuve par 9 de la division de 3 630 par 62, dont le quotient est 58 et le reste 34.

$$3\,630 = 62 \times 58 + 34 \qquad 34 < 62$$
$$3\,630 = (\text{mult. } 9 + 8) \times (\text{mult. } 9 + 4) + \text{mult. } 9 + 7$$
$$= \text{mult. } 9 + 32 + \text{mult. } 9 + 7$$
$$3\,630 = \text{mult. } 9 + 39$$
$$3\,630 = \text{mult. } 9 + \mathbf{3}.$$

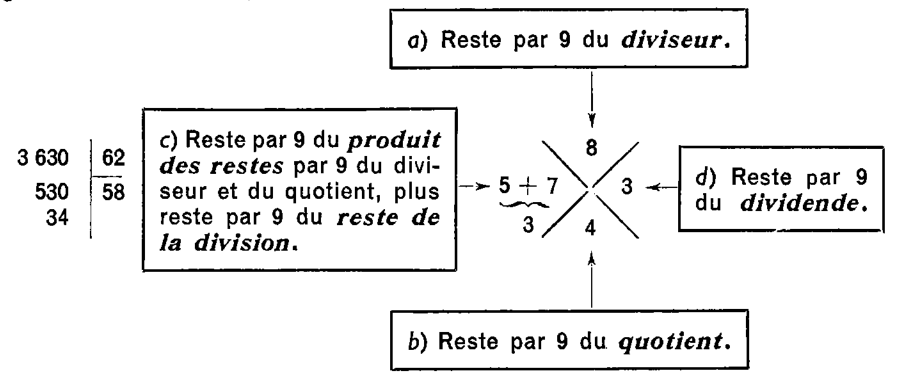
En cherchant le reste de la division par 9 du dividende 3 630, on doit donc trouver 3 ; *c'est ce qu'il faut vérifier.*

Or, on a bien :

$$3\,630 = \text{mult. } 9 + 3 + 6 + 3 = \text{mult. } 9 + 12 = \text{mult. } 9 + \mathbf{3}.$$

L'opération est donc, en principe, exacte.

Pratiquement, on dispose ainsi l'opération, les restes étant calculés, en général, dans l'ordre *a*, *b*, *c*, *d* :



REMARQUE. — Ce procédé de vérification des multiplications et des divisions, très utile dans la pratique, ne permet pas d'affirmer que l'opération considérée est toujours exacte.
En particulier, il ne décèle pas les fautes entraînant dans le calcul des « sommes de chiffres » une erreur nulle ou égale à 9, celle qui résulte par exemple d'une interversion de chiffres.

EXERCICES

371. On donne les nombres :

4*x*7   4 *x*07   32 *x*40   75 *x*82

dans lesquels *x* désigne un chiffre.
Déterminer *x* pour que ces nombres soient divisibles par 9.

372. Déterminer *x* et *y* pour que les nombres 5 *x* 30*y* et 4 5*xy* soient divisibles par 9.

373. Étant donné les nombres :

285 4 024 612 600 315 7 392

déterminer :

1° l'ensemble E de ceux qui sont divisibles par 4 ;
2° l'ensemble F de ceux qui sont divisibles par 3 ;
3° l'ensemble J de ceux qui sont divisibles par 4 et par 3 (se note $E \cap F$ et se lit E inter F ; c'est l'intersection des ensembles E et F).

374. Montrer que la différence entre un nombre de trois chiffres et le nombre obtenu en renversant l'ordre des chiffres est divisible par 9.

375. Montrer que le produit de trois nombres entiers consécutifs est toujours divisible par 3.

376. Montrer que, si l'on divise par 3 la moitié du produit de deux nombres entiers consécutifs, on n'obtient jamais 2 pour reste.

377. Montrer que, si a n'est pas divisible par 3, le nombre $a^2 - 1$ est toujours divisible par 3.

378. Quels sont les restes des divisions par 3 des nombres : 185^2 ? 37^3 ? 542^5 ?

379. Après avoir constaté que 90 = mult. 6, trouver les restes des divisions par 6 de :

100 1 000 10 000 100 000...

Montrer qu'un nombre est divisible par 6 lorsque, en additionnant le chiffre des unités et 4 fois la somme des autres chiffres, on obtient un nombre divisible par 6.

Application aux nombres : 534 7 242 7 245 ?

380. Démontrer que le reste de la division d'un nombre par 11 est égal au reste de la division par 11 de la somme des chiffres de rang impair (à partir de la droite) diminuée de la somme des chiffres de rang pair.

Application aux nombres : 5 874 57 145 130 211 40 403 ?

381. Étant donné une somme de deux termes, à quelle condition un nombre qui divise l'un des termes divise-t-il la somme ?

Application. — Pour quelles valeurs entières du nombre p :

1° la somme $p + 9$ est-elle divisible par p ?
2° la somme $p + 8$ est-elle divisible par $p - 1$ [remarquer que $p + 8 = (p - 1) + 9$] ?

17. MULTIPLES ET DIVISEURS COMMUNS A DEUX OU PLUSIEURS NOMBRES

1. Multiples communs à deux nombres.

Dressons, par exemple, les listes des *multiples* des nombres 6 et 8 :

Multiples de 6 →	12		18	**24**	30		36		42	**48**	54...	
Multiples de 8 →		16		**24**		32		40		**48**		56...

Les nombres 24 et 48, qui figurent dans les deux listes, sont *des multiples communs à 6 et 8 ;* le nombre 24, qui est le *plus petit* de ces multiples, est appelé ***le plus petit commun multiple de 6 et 8.***

REMARQUES. — 1° Si l'un des deux nombres *est un multiple de l'autre*, ce qui est le cas pour 12 et 6, les multiples qui leur sont communs sont : 12, 24, 36, 48..., c'est-à-dire *12 et les multiples de 12*. Dans ce cas, les multiples communs aux deux nombres sont *les multiples du plus grand de ces nombres*. Celui-ci est le ***plus petit commun multiple*** des deux nombres.

2° Le *produit de deux nombres* est un multiple commun à ces nombres. Par exemple : le produit $6 \times 8 = 48$ est un multiple commun à 6 et à 8.

2. Application. Recherche du plus petit commun multiple de deux nombres.

EXEMPLE. — *Quel est le plus petit commun multiple de 6 et 20 ?*

Le nombre 20 n'étant pas multiple de 6, cherchons le plus petit des multiples de 20 qui soit divisible par 6. Le second multiple de 20, ou 40, n'est pas divisible par 6. Mais le troisième multiple de 20, ou 60, est divisible par 6.

Le plus petit commun multiple de 6 et 20 est donc **60.**

3. Multiples communs à plusieurs nombres.

La recherche des multiples communs à plusieurs nombres, 6, 10 et 12 par exemple, peut se faire, comme dans le paragraphe 1, en dressant le tableau ci-dessous :

Multiples de 6 →	12		18		24	30	36		42	48		54	**60...**
Multiples de 10 →	10			20		30		40			50		**60...**
Multiples de 12 →		12			24		36			48			**60...**

En prolongeant ces listes, on trouverait, à la suite de 60, qui est ***le plus petit commun multiple*** de 6, 10 et 12, leurs multiples communs, 120, 180...

Dans la recherche du plus petit commun multiple des trois nombres 6, 10 et 12, on peut éviter l'écriture de ces listes en cherchant, comme au paragraphe 2, le plus petit commun multiple *de deux des nombres*, 6 et 10 par exemple, ce qui donne 30, puis le plus petit commun multiple de 30 et *du troisième nombre* 12, ce qui donne **60.**

4. Diviseurs communs à deux nombres.

Dressons, par exemple, les listes des *diviseurs* de 30 et 36 :

Diviseurs de 30 → 1 2 3 5 6 10 15 30.
Diviseurs de 36 → 1 2 3 4 6 9 12 18 36.

Les nombres 1, 2, 3 et 6, qui figurent dans les deux listes, sont des *diviseurs communs à 30 et 36 ;* le nombre 6, qui est le *plus grand* de ces diviseurs, est appelé ***le plus grand commun diviseur de 30 et 36.***

REMARQUES. — 1° Si l'un des deux nombres est *un diviseur de l'autre*, ce qui est le cas de 15 et 30, le *plus petit* de ces nombres, 15, est le plus grand commun diviseur des deux nombres.

2° Deux nombres peuvent avoir pour *seul diviseur commun le nombre 1* : on dit que ces nombres sont ***premiers entre eux*** (23e leçon); tels sont, par exemple, les nombres 14 et 25.

5. Application. Recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres.

EXEMPLE. — *Quel est le plus grand commun diviseur de 45 et 108 ?*

Le nombre 45 n'étant pas un diviseur de 108, cherchons, parmi les diviseurs de 45, c'est-à-dire 1, 3, 5, 9 et 15, le plus grand nombre qui soit aussi un diviseur de 108.

15 n'est pas un diviseur de 108, mais 9 est un diviseur de 108, car $108 = 9 \times 12$. Le plus grand commun diviseur de 45 et 108 est donc **9**.

6. Diviseurs communs à plusieurs nombres.

La recherche des diviseurs communs à plusieurs nombres, 135, 225 et 105, par exemple, peut se faire, comme au paragraphe 4, en comparant les listes des diviseurs de ces nombres.

Pour trouver le plus grand commun diviseur de ces trois nombres, on peut :

— soit chercher dans ces trois listes le plus grand des diviseurs communs qui est 15 ;

— soit chercher le plus grand des diviseurs communs à 135 et 225 par exemple, ce qui donne 45, puis le plus grand commun diviseur de 45 et *du troisième* nombre 105, ce qui donne **15**.

EXERCICES

382. Former les listes des 10 premiers multiples de 6 et 9. Trouver tous les multiples communs figurant dans ces listes.

383. Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont des multiples communs à 8 et à 15 :

150 240 160 320 120 300 840 ?

384. Établir la liste des multiples de 15 inférieurs à 100. Rechercher dans cette liste les multiples de 6. Quel est le plus petit commun multiple de 15 et de 6 ?

385. Établir la liste des multiples de 8 et la liste des multiples de 12, inférieurs à 100. Rechercher les multiples communs de 8 et de 12. Quel est le plus petit commun multiple de 8 et de 12?

386. Faire les listes des multiples de 6, 8 et 12 inférieurs à 120. Quel est le plus petit commun multiple de 6, 8, 12?

386 bis. Trouver le plus petit nombre qui, divisé par 8 et par 6, donne, dans les deux cas, 1 pour reste.

387. Trouver le plus petit commun multiple de : 5, 4 et 10 ; de 6, 8 et 48 ; de 12, 15 et 21 ; de 350, 80 et 140.

388. Le nombre x est multiple de 7. Les nombres suivants sont-ils multiples de 7?

$3x \qquad 5x \qquad (x+14) \qquad (x+15) \qquad (3x+21).$

389. Deux multiples consécutifs d'un nombre entier a sont égaux à 90 et 108. Deux multiples consécutifs d'un nombre entier b sont égaux à 96 et 120. Trouver le plus petit commun multiple de a et de b.

390. Chercher les diviseurs communs aux nombres 120 et 48. Quel est le plus grand de ces diviseurs? Même question pour 75 et 150?

391. Établir la liste des diviseurs de 45 et la liste des diviseurs de 50. Quels sont les diviseurs communs à 45 et à 50? Quel est le plus grand?

392. Rechercher, dans la liste de diviseurs de 40, les diviseurs communs à 40 et à 60. Quel est le plus grand de ces diviseurs communs?

393. Trouver les nombres inférieurs à 200 divisibles à la fois par 6, 10 et 15.

394. Trouver les diviseurs de 36, ceux de 48. Quel est le plus grand commun diviseur de 36 et de 48?

395. Les nombres 2, 3, 5 sont-ils des diviseurs communs de 210 et de 240? Pourquoi?

396. Pour quelles valeurs de x chacun des nombres suivants est-il un multiple commun à 3 et à 4 :

$2x4 \qquad 72x \qquad x36 \qquad 7\,x04$?

397. Pour quelles valeurs de x et y chacun des nombres suivants est-il divisible par 9 et par 5 :

$7\,xy \qquad x0y \qquad 3\,6xy \qquad x\,y15$?

398. Pour quelles valeurs de x et y chacun des nombres suivants est-il divisible par 9 et par 25 :

$6xy \qquad x5y \qquad xy0 \qquad 70\,x7y$?

399. Pour quelles valeurs de x et y chacun des nombres $4y \quad 7x6$ et $36\,4xy$ est-il divisible par 4 et par 9?

400. Un nombre a est divisible par 3. Son double est-il divisible par 6?

401. Les nombres exprimant les produits $15x$ et $25y$ ont-ils, quels que soient x et y, un diviseur *apparent*?

402. Les nombres exprimant les produits $6x$, $18y$ et le nombre 24 ont-ils, quels que soient x et y, un ou plusieurs diviseurs communs *apparents*?

Mêmes questions :

403. Pour $14a \quad 21a \quad 35a$.

404. Pour $(24x+18) \quad 12x \quad (36x+6)$.

405. Deux nombres A et B sont respectivement égaux aux produits de facteurs :

$A = 3 \times 504 \times 4 \qquad B = 2 \times 251 \times 6 \times 7.$

Montrer, sans faire de calculs, que 12 est un diviseur commun de A et de B.

18. NOMBRES PREMIERS

Certains nombres admettent plusieurs diviseurs. Par exemple, 12 a pour diviseurs 1, 2, 3, 4, 6 et 12. Mais le nombre 7 n'a pour diviseurs que 7 et 1. On dit que 7 est un *nombre premier.*

1. Définition.

Un nombre premier est un nombre qui n'admet pour diviseurs que lui-même et l'unité.

2, 3, 5, 7... sont des nombres premiers.

12, 18, 25 ne sont pas des nombres premiers. Les nombres *non premiers* sont encore appelés *nombres composés.*

2. Nombres non premiers.

Soit un nombre non premier quelconque N. Il admet un certain nombre de diviseurs ; rangeons-les par *ordre de grandeur croissante :*

$$1 \quad a \quad b \quad c \quad d \ldots \quad N.$$

Le plus petit d'entre eux — autre que 1 — est *a*.

Démontrons que a est un nombre premier.

En effet, si *a* n'était pas premier, il admettrait un diviseur *a'*, évidemment *plus petit* que lui. Or, le nombre *a'* divisant *a* diviserait également N, qui est multiple de *a* (13e leçon, § 1), ce qui est impossible, puisque nous avons supposé que *a* était le plus petit diviseur (autre que 1) de N.

Énonçons cette conclusion :

Théorème. — Si un nombre n'est pas premier, il admet au moins un diviseur premier autre que lui-même et l'unité.

EXEMPLE. — Le plus petit diviseur (autre que 1) de 36 est le nombre premier 2.

3. Table de nombres premiers.

Pour former, par exemple, la table des nombres premiers inférieurs à 150, écrivons la suite naturelle des nombres et supprimons dans cette liste les nombres qui ne sont pas premiers. D'après le théorème précédent, ces nombres admettent pour diviseur au moins un nombre premier : nous pouvons donc supprimer tous les multiples des nombres premiers 2, 3, 5... (grisés sur la table ci-contre).

1° Multiples du nombre premier 2; à partir de 2, on supprime les nombres de 2 en 2 (nombres pairs).

2° Multiples du nombre premier 3; à partir de 3, on supprime les nombres de 3 en 3 :

$3 + 3$ ou $3 \times 2 = \mathbf{6}$ $\quad$ $6 + 3$ ou $3 \times 3 = \mathbf{9}$

$9 + 3$ ou $3 \times 4 = \mathbf{12}$ $\quad$ $12 + 3$ ou $3 \times 5 = \mathbf{15}$...

En notant que les multiples pairs de 3 ont déjà été supprimés comme multiples de 2, les nombres à supprimer se succèdent de 6 en 6.

TABLE DES NOMBRES PREMIERS DE 1 A 1 000

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	157	163	167	173	179	181	191	193	197
199	211	223	227	229	233	239	241	251	257
263	269	271	277	281	283	293	307	311	313
317	331	337	347	349	353	359	367	373	379
383	389	397	401	409	419	421	431	433	439
443	449	457	461	463	467	479	487	491	499
503	509	521	523	541	547	557	563	569	571
577	587	593	599	601	607	613	617	619	631
641	643	647	653	659	661	673	677	683	691
701	709	719	727	733	739	743	751	757	761
769	773	787	797	809	811	821	823	827	829
839	853	857	859	863	877	881	883	887	907
911	919	929	937	941	947	953	967	971	977
983	991	997							

3° ***Multiples du nombre premier 5;*** à partir de 5, on supprime les nombres de 5 en 5 :

$5+5$ ou $5\times 2=$ **10** $\qquad$ $10+5$ ou $5\times 3=$ **15**
$15+5$ ou $5\times 4=$ **20** $\qquad$ $20+5$ ou $5\times 5=$ **25**...

Remarquons que les multiples de 5 qui précèdent 25 ont déjà été supprimés comme multiples de 2 ou de 3 ; le premier multiple à supprimer est donc *le carré de 5* qui est 25.

4° ***Multiples du nombre premier 7:*** à partir de 7, on supprime les nombres de 7 en 7. D'après la remarque précédente, le premier multiple à supprimer est le carré de 7 qui est 49.

5° ***De la même manière,*** on supprime les multiples des nombres premiers 11, 13, 17... en commençant par $11^2=121$. Le plus petit multiple de 13 à supprimer est $13^2=169$, mais, puisque le plus grand des nombres de la suite naturelle écrit dans le tableau de la page 81 est 150, la recherche est achevée.

Tous les nombres restant alors dans des cases blanches sont des nombres premiers.

4. Reconnaître si un nombre N est premier.

Si l'on dispose d'une table, on la consulte. Sinon, on essaie de diviser N par les nombres premiers successifs.

EXEMPLE 1. $N=561$.

D'après les caractères de divisibilité, N n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5. La division par 7 donne pour reste 1. La division par 11 donnant un reste nul, *le nombre 561 n'est pas premier.*

EXEMPLE 2. $N=317$.

D'après les caractères de divisibilité, N n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5. Les divisions par 7, 11, 13, 17, 19 donnent des restes différents de 0, les quotients des divisions vont en décroissant.

Examinons la division par 19 :

$$317=19\times 16+13,$$

dans laquelle le quotient obtenu 16 *est inférieur au diviseur 19.*

Il est inutile de prolonger les essais. En effet, si 317 admettait un diviseur premier supérieur à 19, le quotient, qui serait aussi un diviseur de 317, serait inférieur à 16. Le nombre 317 admettrait alors un diviseur premier inférieur à 19, ce qui est impossible puisque les essais de diviseurs premiers inférieurs à 19 ont déjà été effectués sans succès.

Le nombre 317 est donc premier.

Règle. — Pour reconnaître si un nombre est premier, on le divise successivement par les nombres premiers 2, 3, 5, 7... de la suite naturelle. On s'arrête soit lorsqu'une division se fait exactement (le nombre n'est pas premier), soit lorsqu'on obtient un quotient inférieur au diviseur essayé (le nombre est premier).

5. Suite des nombres premiers [1].

On peut se demander s'il est possible de construire une table contenant *tous les nombres premiers*, ce qui revient à se demander si la suite des nombres premiers est illimitée.

Considérons la suite des nombres premiers de 1 jusqu'à p, le nombre p étant un nombre premier quelconque, et faisons le produit :

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \ldots \times p,$$

puis étudions le nombre :

$$N = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \ldots \times p) + 1$$

qui, visiblement, est plus grand que p. Deux cas seulement peuvent se présenter :

1° *N est premier*, ce qui prouve qu'il existe au moins un nombre premier supérieur à p.

2° *N n'est pas premier;* il admet alors au moins un diviseur premier a (théorème, du § 2). Or a n'est égal à aucun des nombres de la suite 2, 3 ... p, car les divisions de N par chacun des nombres de cette suite ont pour reste 1. Dans ce cas, il existe donc au moins un nombre premier supérieur à p, et ce nombre est a.

En conclusion, quel que soit le nombre premier p, on a démontré qu'il existe un nombre premier qui lui est supérieur, ce qui s'énonce :

THÉORÈME. — ***La suite des nombres premiers est illimitée.***

EXERCICES

Reconnaître si les nombres suivants sont premiers :

406. 141 827 972 667 315 551.

407. 997 608 919 161 341 509.

408. 2 141 3 247 1 001 1 003 1 966 1 999.

409. Quel est le plus petit diviseur premier des nombres qui, dans la liste ci-dessous, ne sont pas premiers :

223 253 821 451 953 617 ?

410. Quel est le plus petit diviseur premier des nombres qui, dans la liste ci-dessous, ne sont pas premiers :

119 487 877 611 437 419

411. Montrer que la somme de deux nombres impairs n'est pas un nombre premier.

412. Montrer que la somme de trois nombres consécutifs n'est pas un nombre premier.

413. Un nombre formé de deux chiffres égaux est-il premier ?

414. Vérifier que, si l'on divise par 6 un nombre premier autre que 2 ou 3, le reste est 1 ou 5. Le démontrer.

415. Vérifier, en donnant des exemples, que, si le reste de la division par 6 d'un nombre est 1 ou 5, ce nombre n'est pas toujours un nombre premier.

(1) L'étude de ce paragraphe pourra être reportée à une classe ultérieure.

19. DÉCOMPOSITION D'UN NOMBRE EN UN PRODUIT DE FACTEURS PREMIERS

I. Problème.

Étant donné un nombre non premier N, trouver un produit de facteurs premiers égal à ce nombre.

1° Le nombre N admet au moins un diviseur premier a (18e leçon, § 2). Divisons N par a ; soit a' le quotient.

$$N = a \times a'. \qquad (1)$$

Si a' est premier, la décomposition est terminée.

2° Si a' n'est pas premier, il admet au moins un diviseur premier b.
Divisons a' par b ; soit b' le quotient : $a' = b \times b'$.
Remplaçons, dans l'égalité (1), a' par ce produit :

$$N = a \times b \times b'. \qquad (2)$$

Si b' est premier, la décomposition est terminée.

3° Si b' n'est pas premier, il admet au moins un diviseur premier c.
Divisons b' par c ; soit c' le quotient : $b' = c \times c'$.
Remplaçons dans l'égalité (2), b' par ce produit :

$$N = a \times b \times c \times c'...$$

et ainsi de suite.

Or, les quotients successifs a', b', c', ... vont en décroissant. Ils sont donc en nombre limité et, après un certain nombre de divisions, l'un des quotients est un nombre premier. *Le nombre N est alors égal à un produit de facteurs premiers :*

$$N = a \times b \times c \times d \times e...$$

On dit que le nombre N a été « *décomposé* » en ses facteurs premiers.

REMARQUES.

1° Dans la décomposition obtenue, certains facteurs peuvent être *égaux* et leur produit peut s'écrire sous forme d'une puissance de ce facteur. D'une manière générale :

$$N = a^m \times b^n \times c^p \times d^q...$$

2° Nous admettrons, sans démonstration (on pourra le vérifier sur l'exemple du § 2), que, si l'on modifie *l'ordre dans lequel sont pris les diviseurs premiers a, b, c...,* on aboutit toujours au même résultat.

D'où l'énoncé du théorème :

Tout nombre non premier peut être décomposé en un produit de facteurs premiers et la décomposition est unique.

2. Disposition pratique de l'opération.

Soit à décomposer 504 en un produit de facteurs premiers.

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

On dispose les calculs comme il est indiqué ci-contre : *les diviseurs premiers,* en commençant par le plus petit, et en suivant l'ordre naturel, sont écrits dans la colonne de droite ; les *quotients successifs* sont écrits dans la colonne de gauche.

On poursuit l'opération jusqu'à ce que l'on obtienne 1 pour quotient. Le nombre donné est alors égal au produit des facteurs premiers écrits dans la colonne de droite :

$$504 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$$

ou $$\boldsymbol{504 = 2^3 \times 3^2 \times 7.}$$

504	7
72	3
24	2
12	3
4	2
2	2
1	

Ainsi que le montre l'opération ci-contre, on aurait obtenu le même résultat en changeant l'ordre des divisions :

$$504 = 7 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2$$
$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7.$$

REMARQUE. — Puisque le résultat ne dépend pas de l'ordre des diviseurs premiers employés, on peut, dans certains cas, utiliser des procédés plus rapides que l'application de la règle générale. Ainsi :

$$2\,600 = 26 \times 100 = 2 \times 13 \times 4 \times 25$$
$$= 2 \times 4 \times 25 \times 13 = 2^3 \times 5^2 \times 13.$$

3. Produit de nombres décomposés en facteurs premiers.

Effectuons le produit P de $A = 2^4 \times 3^2 \times 7$
par $B = 2 \times 3 \times 11,$
sans calculer A et B.

Nous obtenons : $P = (2^4 \times 3^2 \times 7) \times (2 \times 3 \times 11)$

$$P = 2^4 \times 2 \times 3^2 \times 3 \times 7 \times 11$$
$$\boldsymbol{P = 2^5 \times 3^3 \times 7 \times 11.}$$

Les facteurs premiers de P sont ceux de A et B ; l'exposant de chaque facteur premier du produit est égal à la somme des exposants de ce facteur dans A et B.

EXERCICES

Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers :

416.	380	819	144	514	680	2 548.
417.	720	841	640	2 590	425	2 225.
418.	228	500	3 333	3 205	1 266	4 000.

En opérant mentalement, décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers :

419.	18	77	85	100	95	144.
420.	50	75	625	240	900	440.
421.	10^3	6^3	15^2	12^2	39^3	18^4.

422. Sachant que : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, décomposer en produits de facteurs premiers :

$$91 \text{ ou } 10^2 - 3^2$$
$$399 \text{ ou } 20^2 - 1^2$$
$$9\,999 \text{ ou } 100^2 - 1^2$$
$$1\,596 \text{ ou } 40^2 - 2^2$$
$$2^4 - 1$$
$$3^4 - 1.$$

423. Montrer que $2^4 \times 5^2 \times 11^4$ est le carré d'un nombre entier N. Calculer N.

424. Montrer que $2^6 \times 3^3 \times 7^3$ est le cube d'un nombre entier N. Calculer N.

425. Montrer que 11 025 est le carré d'un nombre entier N. Calculer N.

426. Quel est le nombre de facteurs premiers égaux à 5 qui entrent dans le produit des 50 premiers nombres?

427. Quel est l'exposant de la plus haute puissance de 2 qui divise le produit des 10 premiers nombres?

428. Décomposer en produit de facteurs premiers le produit des dix premiers nombres de la suite naturelle :

$$P = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \times 9 \times 10.$$

429. Même question pour :

$$P = 10 \times 11 \times 12 \ldots \times 19 \times 20.$$

20. RECHERCHE DES DIVISEURS D'UN NOMBRE

Lorsqu'un nombre n'est pas premier, il admet en général, outre ses diviseurs premiers, d'autres diviseurs qui ne sont pas des nombres premiers. L'étude qui suit a pour objet de montrer comment on calcule tous ces diviseurs.

I. Deux nombres étant décomposés en leurs facteurs premiers, comment reconnaître si l'un est divisible par l'autre ?

1° Soit A un nombre divisible par B ; le quotient de A par B étant Q :

$$A = B \times Q.$$

Donnons à A et à B les valeurs numériques 1 260 et 90 :

$$1\,260 = 90 \times 14$$

ou

$$\underbrace{2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7}_{1\,260} = \underbrace{(2 \times 3^2 \times 5)}_{90} \times \underbrace{2 \times 7}_{14}$$

Cette égalité montre que la décomposition de B = 90 en facteurs premiers est *incluse* dans celle de A = 1 260. Donc :

a) la décomposition de A contient *tous* les facteurs premiers de B ;

b) l'exposant de chacun de ces facteurs est, dans A, *plus grand* ou *égal* à l'exposant du même facteur dans B.

D'où l'énoncé suivant :

Théorème. — Si un nombre est divisible par un autre, il contient tous les facteurs premiers de cet autre avec des exposants au moins égaux.

2° Soient deux nombres A′ et B′, tels que A′ contienne tous les facteurs de B′ avec des exposants au moins égaux, par exemple :

$$\begin{cases} A' = 3^3 \times 5^2 \times 7 \\ B' = 3 \times 5^2. \end{cases}$$

Écrivons le nombre A′ de manière que dans sa décomposition apparaisse le produit de facteurs 3×5^2, donc le nombre B′ :

$$A' = (3 \times 5^2) \times (3^2 \times 7)$$

ou, en remplaçant 3×5^2 par B′ :

$$A' = B' \times (3^2 \times 7).$$

Cette égalité montre que A′ est le produit de B′ par un autre nombre, que nous avons calculé, et que nous désignons par C′ :

$$A' = B' \times C'.$$

Le nombre A′ est donc divisible par B′.

D'où l'énoncé suivant :

Théorème réciproque. — Si un nombre contient tous les facteurs premiers d'un autre avec des exposants au moins égaux, il est divisible par cet autre.

2. Remarque.

Le théorème précédent et sa réciproque peuvent être énoncés sous la forme suivante :

a) *Un nombre M est un multiple d'un nombre D* si, et seulement si, la décomposition en facteurs premiers de M contient tous les facteurs premiers de D, avec des exposants au moins égaux.

b) *Un nombre D est un diviseur d'un nombre M* si, et seulement si, la décomposition en facteurs premiers de D ne contient pas d'autres facteurs premiers que ceux de M, avec des exposants au plus égaux.

3. Ensemble des diviseurs d'un nombre.

D'après ce qui précède, on obtient tous les diviseurs d'un nombre N en formant les produits groupant, de *toutes les manières possibles*, les facteurs premiers de N et en les affectant d'exposants inférieurs ou égaux à ceux qu'ils ont dans N.

Tout diviseur du nombre : $a^m \times b^n \times c^p$ (les facteurs a, b, c étant premiers) est donc de la forme : $a^{m'} \times b^{n'} \times c^{p'}$, les exposants m', n', p' étant respectivement *au plus égaux* à m, n, p, mais pouvant être *nuls* (par exemple, si le facteur a ne figure pas dans le diviseur, $m' = 0$).

Pour obtenir *tous les diviseurs* d'un nombre, il est commode d'opérer *méthodiquement* de la manière suivante :

EXEMPLE : $N = 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5.$

Écrivons sur des lignes successives le nombre 1 et les puissances de chacun des facteurs premiers de A.

1	2	2^2	2^3
1	3	3^2	
1	5		

Multiplions chaque nombre de la 1re ligne par le premier de la 2e ligne ; puis chaque nombre de la 1re ligne par le deuxième de la 2e ligne, etc :

$1 \times 1 = \mathbf{1}$	$2 \times 1 = \mathbf{2}$	$2^2 \times 1 = \mathbf{4}$	$2^3 \times 1 = \mathbf{8}$
$1 \times 3 = \mathbf{3}$	$2 \times 3 = \mathbf{6}$	$2^2 \times 3 = \mathbf{12}$	$2^3 \times 3 = \mathbf{24}$
$1 \times 3^2 = \mathbf{9}$	$2 \times 3^2 = \mathbf{18}$	$2^2 \times 3^2 = \mathbf{36}$	$2^3 \times 3^2 = \mathbf{72}.$

Multiplions ensuite chacun des nombres ainsi obtenus par les nombres de la 3e ligne. La multiplication par 1 reproduit le tableau précédent ; il suffit d'y ajouter le tableau suivant :

$1 \times 5 = \mathbf{5}$	$2 \times 5 = \mathbf{10}$	$4 \times 5 = \mathbf{20}$	$8 \times 5 = \mathbf{40}$
$3 \times 5 = \mathbf{15}$	$6 \times 5 = \mathbf{30}$	$12 \times 5 = \mathbf{60}$	$24 \times 5 = \mathbf{120}$
$9 \times 5 = \mathbf{45}$	$18 \times 5 = \mathbf{90}$	$36 \times 5 = \mathbf{180}$	$72 \times 5 = \mathbf{360}.$

Remarque. — **Nombre des diviseurs d'un nombre.**

Pour former les diviseurs de N, on a pu donner :

— aux exposants du facteur 2, les valeurs 0, 1, 2, 3 (4 valeurs différentes) ;
— aux exposants du facteur 3, les valeurs 0, 1, 2 (3 valeurs différentes) ;
— aux exposants du facteur 5, les valeurs 0, 1 (2 valeurs différentes).

Le nombre des diviseurs de N est donc :

$$4 \times 3 \times 2 = 24 \quad \text{ou} \quad (3+1)(2+1)(1+1).$$

Plus généralement, le nombre des diviseurs de $N = a^m \times b^n \times c^p$ est égal à :

$$(m+1)(n+1)(p+1).$$

4. Disposition pratique.

		1			
360	2	**2**			
180	2	**4**			
90	2	**8**			
45	3	**3**	**6**	**12**	**24**
15	3	**9**	**18**	**36**	**72**
5	5	**5**	**10**	**20**	**40**
1		**15**	**30**	**60**	**120**
		45	**90**	**180**	**360**

Formons tous les produits de facteurs obtenus dans le paragraphe précédent en opérant comme ci-contre :

1° Décomposons le nombre en ses facteurs premiers (colonnes de gauche).

2° Dans une troisième colonne, écrivons le diviseur 1, puis le diviseur 2, puis les produits du facteur 2 par les diviseurs déjà écrits.

3° Écrivons ensuite les produits du facteur 3 par les diviseurs déjà écrits, puis les produits du facteur 5 par les diviseurs déjà écrits, et ainsi de suite.

EXERCICES

Sans faire les divisions, dire si A est divisible par B :

430. $A = 2^2 \times 3 \times 5^2$, $B = 2 \times 5^2$ | $A = 3 \times 7^2 \times 11$, $B = 3 \times 7 \times 13$ | $A = 12\,780$, $B = 180$.

431. Trouver tous les diviseurs de 840, de 370, de 720.

432. 1° Quel est le nombre des diviseurs de 225, de 148, de 7 000 ?

2° Trouver ces diviseurs et vérifier les réponses obtenues au 1°.

433. Cherchez les diviseurs communs à :

45, 75 et 105	48, 128 et 112	240, 720 et 300.
80, 120 et 130	250, 375 et 425	280, 420 et 350.

434. Vérifier que, si l'on range les diviseurs d'un nombre N (y compris 1 et N) par ordre de grandeur croissante, le produit de deux diviseurs équidistants de 1 et N est égal au nombre N. *Exemple* : N = 300.

435. Comment peut-on obtenir le produit de tous les diviseurs de 300 (voir exercice précédent) ?

436. Trouver deux nombres entiers dont le produit est 1 440. Nombre de solutions ?

437. Avec les facteurs premiers 2 et 3, former les nombres ayant 12 diviseurs.

438. Trouver tous les nombres de la forme $2^m \times 3^p \times 5^n$ ayant 12 diviseurs.

439. Quel est le plus petit nombre ayant 15 diviseurs ?

440. Montrer sur des exemples que, si un nombre N est égal à a^2, le nombre de ses diviseurs est impair.

441. Montrer que le produit de cinq nombres entiers consécutifs est divisible par le produit des cinq premiers nombres entiers.

21. PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR

Nous savons déjà (17e leçon, § 6) trouver les diviseurs communs à plusieurs nombres en comparant les listes des diviseurs de ces nombres. Mais il est plus rapide de déterminer ces diviseurs communs à partir de la *décomposition de ces nombres en leurs facteurs premiers.*

1. Diviseurs communs à plusieurs nombres.

Considérons les nombres 60, 72 et 84, décomposés en leurs facteurs premiers :

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5.$$
$$72 = 2^3 \times 3^2.$$
$$84 = 2^2 \times 3 \times 7.$$

1° Tout diviseur de 60 n'a pas d'autres facteurs premiers que 2, 3 ou 5, ces facteurs ayant un exposant au plus égal à 2 pour le facteur 2 et à 1 pour les deux autres facteurs (20e leçon, § 2).

2° Tout diviseur de 72 n'a pas d'autres facteurs premiers que 2 ou 3, ces facteurs ayant un exposant au plus égal à 3 pour le facteur 2 et à 2 pour le facteur 3.

3° Tout diviseur de 84 n'a pas d'autres facteurs premiers que 2, 3 ou 7, ces facteurs ayant un exposant au plus égal à 2 pour le facteur 2 et à 1 pour les deux autres facteurs.

Donc, un *diviseur commun à 60, 72 et 84* contient au plus :

a) le facteur 2, avec l'exposant 2 (s'il contenait trois facteurs 3, il ne diviserait ni 60, ni 84, qui ne le contiennent qu'une seule fois) ;

b) le facteur 3 avec l'exposant 1 (s'il contenait deux facteurs 3, il ne diviserait ni 60, ni 84).

Il ne contient ni le facteur 5 (car il ne diviserait pas 72 et 84), ni le facteur 7 (il ne diviserait pas 60 et 72).

Il est donc de la forme $2^m \times 3^p$, m étant égal à 0, 1 ou 2 ; p étant égal à 0 ou 1.

Il résulte de là que les diviseurs communs aux nombres 60, 72 et 84 sont :

2, $2^2 =$ **4**, **3**, $2 \times 3 =$ **6** et $2^2 \times 3 =$ **12.**

Un diviseur commun à plusieurs nombres est donc formé de facteurs premiers communs à ces nombres, chacun de ces facteurs étant affecté d'un exposant au plus égal au plus petit des exposants qu'il a dans la décomposition de ces nombres.

2. Recherche du plus grand commun diviseur de plusieurs nombres.

Le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres (17e leçon, § 4) étant le plus grand nombre qui les divise tous, on peut l'obtenir en faisant le produit de tous *les facteurs premiers communs* à ces nombres, chacun de ces facteurs étant affecté *du plus grand exposant possible.*

Dans l'exemple précédent, les exposants les plus grands possible sont 2 pour le facteur 2 et 1 pour le facteur 3, Donc, le plus grand commun diviseur de 60, 72 et 84 est : $2^2 \times 3 =$ **12.**

Pour former le p. g. c. d. de plusieurs nombres, on écrit le produit de tous les facteurs premiers communs à ces nombres, chaque facteur étant affecté du plus petit exposant qu'il a dans les décompositions en facteurs premiers de ces nombres.

EXEMPLE. — Soit à trouver le *p. g. c. d.* des nombres :

$$1\,260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$$
$$1\,800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$$
$$660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11.$$
$$P.\ g.\ c.\ d. = 2^2 \times 3 \times 5 = \mathbf{60}.$$

3. Recherche des diviseurs communs à plusieurs nombres.

1° Les diviseurs communs à plusieurs nombres sont formés de facteurs premiers communs à ces nombres, mais ne les comprenant, en général, pas tous. Aussi sont-ils les diviseurs de leur *p. g. c. d.* (§ 1 de la 20e leçon).

Dans l'exemple précédent les diviseurs communs à 1 260, 1 800 et 660 sont les diviseurs de 60.

2° Les diviseurs du *p. g. c. d.* de plusieurs nombres A, B, C, sont des diviseurs des nombres A, B, C, car ceux-ci sont des multiples de leur *p. g. c. d.* (§ 1 de la 20e leçon).

Donc :

Pour trouver tous les diviseurs communs à plusieurs nombres, on cherche tous les diviseurs de leur p. g. c. d.

Dans l'exemple précédent, tous les diviseurs communs à 1 260, 1 800 et 660 sont les diviseurs de 60 c'est-à-dire :

1 2 3 4 6 10 12 15 20 30 60

EXERCICES

Trouver mentalement le *p. g. c. d.* de :

442. 8 et 12 — 25 et 35 — 36 et 18 — 14 et 42 — 33 et 55.

443. 15 et 35 — 24 et 56 — 50 et 70 — 150 et 450 — 180 et 300.

444. 8, 12 et 20 — 5, 60 et 75 — 18, 36 et 45

445. 45, 54, 90 et 120 — 100, 20, 60 et 50 — 96, 36, 48 et 72

Calculer le *p. g. c. d.* des nombres :

446. 720 et 1 080 — 6 720 et 10 780 — 840, 1 050 et 3 600.

447. 490 et 860 — 384 et 906 — 3 500, 420 et 1 200.

448. 630 et 4 620 — 326, 722, 4 560 — 13 500, 6 300, 7 200.

449. 120, 150, 180 et 240 — 630, 720, 990, 1 800 et 1 620.

450. Chercher le *p. g. c. d.* D′ de 1 200 et 5 400, puis le *p. g. c. d.* D″ de 3 000 et 5 000. Trouver ensuite le *p. g. c. d.* D de D′ et D″. Vérifier que D est le *p. g. c. d.* des quatre nombres donnés.

451. Trouver tous les diviseurs communs aux nombres :
30 et 50 — 48 et 72 — 8 400, 3 500 et 420.

452. Quel est le *p. g. c. d.* de 70 et 280? Généraliser: si un nombre A est divisible par un nombre B, quel est leur *p. g. c. d.*?

453. Montrer que si l'on multiplie deux nombres A et B par *m*, leur *p. g. c. d.* est multiplié par *m*. Donner un exemple.

454. Montrer que si l'on divise deux nombres A et B par un diviseur commun *d*, leur *p. g. c. d.* est divisé par *d*. Donner un exemple.

22. PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE

Nous savons déjà (17e leçon, § 3) trouver des multiples communs à plusieurs nombres en comparant les listes de multiples de ces nombres. Mais il est plus rapide de déterminer ces multiples communs à partir de la *décomposition des nombres en leurs facteurs premiers.*

1. Multiples communs à plusieurs nombres.

Considérons les nombres 50, 60 et 140, décomposés en leurs facteurs premiers :

$$50 = 2 \times 5^2.$$
$$60 = 2^2 \times 3 \times 5.$$
$$140 = 2^2 \times 5 \times 7.$$

1° Tout multiple de 50 contient le facteur 2 (avec un exposant au moins égal à 1) et le facteur 5 (avec un exposant au moins égal à 2) (20e leçon, § 1).

2° Tout multiple de 60 contient le facteur 2 (avec un exposant au moins égal à 2) et les facteurs 3 et 5 (avec des exposants au moins égaux à 1).

3° Tout multiple de 140 contient le facteur 2 (avec un exposant au moins égal à 2) et les facteurs 5 et 7 (avec des exposants au moins égaux à 1).

Donc, *tout multiple commun à 50, 60 et 140* contient :

a) le facteur 2, affecté d'un exposant au moins égal à 2 ;
b) le facteur 3, affecté d'un exposant au moins égal à 1 ;
c) le facteur 5, affecté d'un exposant au moins égal à 2 ;
d) le facteur 7, affecté d'un exposant au moins égal à 1.

Il est ainsi de la forme :

$$(2^m \times 3^n \times 5^p \times 7^q) \times k,$$

Un multiple commun à plusieurs nombres contient donc tous les facteurs premiers communs à ces nombres, chacun de ces facteurs étant affecté d'un exposant au moins égal au plus grand des exposants qu'il a dans la décomposition des nombres.

2. Recherche du plus petit commun multiple de plusieurs nombres.

Le plus petit commun multiple de plusieurs nombres étant le plus petit nombre multiple de chacun d'eux, on peut l'obtenir en choisissant pour chacun des exposants *la plus petite valeur possible* et en donnant à k la valeur 1.

Dans l'exemple précédent, les plus petites valeurs possibles des exposants étant 2 pour le facteur 2 ; 1 pour le facteur 3 ; 2 pour le facteur 5 et 1 pour le facteur 7, le plus petit commun multiple de 50, 60 et 140 est :

$$2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = \mathbf{2\,100}.$$

Pour former le p. p. c. m. de plusieurs nombres, on écrit le produit de tous les facteurs premiers, communs ou non, de ces nombres, chaque facteur étant affecté du plus grand exposant qu'il a dans les décompositions en facteurs premiers de ces nombres.

3. Recherche des multiples communs à plusieurs nombres.

D'après le § 1, les multiples communs de 50, 60, 140 sont de la forme :

$$M = (2^m \times 3^n \times 5^p \times 7^q) \times k.$$

Donnons aux exposants m, n, p, q, les valeurs prises pour former le *p. p. c m.* (§ 2) :

$$M = (2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7) \times k.$$

Les multiples communs à plusieurs nombres sont donc les multiples de leur *p. p. c. m.* Dans l'exemple du § 1, ce sont les produits de 2 100 par les nombres de la suite naturelle. Donc :

Pour trouver des multiples communs à plusieurs nombres, on forme des multiples de leur plus petit commun multiple.

EXERCICES

Calculer mentalement le *p. p. c. m.* des nombres :

455. 8 et 12 18 et 30 25 et 35 20 et 36 24 et 15.

456. 80 et 120 5 000 et 3 000 18, 24 et 30 12, 18 et 30.

Calculer le *p. p. c. m.* des nombres :

457. 42 et 64 36 et 108 45, 54 et 120 35, 80 et 140.

458. 108 et 210 42 et 96 120, 150 et 210 135, 165, 315 et 600.

459. 81 000 et 70 200 6 652 et 924 360, 3 300 et 240 10 584 et 11 520.

460. Former le *p. p. c. m.* des nombres :
$A = 125 \times 12\,361$ et $B = 8 \times 12\,361$ sans effectuer les produits.

461. Sans calculer A et B, trouver leur *p. p. c. m.* : $A = 23 \times 7 \times 37$; $B = 31 \times 7 \times 37$.

462. Que devient le *p. p. c. m.* des nombres 72, 216 et 84 lorsqu'on multiplie chacun de ces nombres par 19 ?

463. Que devient le *p. p. c. m.* des nombres 72, 216 et 84 lorsqu'on divise chacun de ces nombres par 3 ?

464. Trouver les nombres inférieurs à 200 divisibles à la fois par 6, 10, 15.

465. Trouver les nombres compris entre 1 000 et 2 000 divisibles à la fois par 90 et par 120.

466. Trouver le plus petit nombre P divisible à la fois par les dix premiers nombres entiers. Comment formerait-on les multiples de P ?

467. Trouver les nombres de trois chiffres qui, divisés successivement par 3, 7, 11, donnent le même reste 2.

468. Trouver le plus petit nombre qui, divisé successivement par 145 et par 165, donne dans les deux cas 7 pour reste.

469. Quel est le plus petit nombre de trois chiffres qui, divisé par 15, 18, 24, donne respectivement 14, 17, 23 pour restes ?

470. Chercher le *p. g. c. d.* et le *p. p. c. m.* de 360 et de 240. Faire le produit du *p. g. c. d.* par le *p. p. c. m.* (en opérant sur les facteurs premiers). Qu'en peut-on conclure ?

23. NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

1. Définitions.

1° *Deux nombres* peuvent ne pas avoir des diviseurs communs, autres que 1.

Ainsi : $56 = 2^2 \times 7$ et $45 = 3^2 \times 5$

n'ont pas de diviseur commun autre que l'unité. On dit qu'ils sont ***premiers entre eux.***

Deux nombres sont premiers entre eux s'ils n'ont pas d'autre diviseur commun que l'unité.

2° *Plusieurs nombres* peuvent de même ne pas avoir des diviseurs communs autres que 1.

C'est le cas de 8, 9 et 12 :

$8 = 2^3$ $9 = 3^2$ $12 = 2^2 \times 3$

On dit qu'ils sont premiers entre eux ***dans leur ensemble.***

Plusieurs nombres sont premiers entre eux dans leur ensemble s'ils n'ont pas d'autre diviseur commun que l'unité.

3° Considérons plusieurs nombres tels que, pris deux à deux d'une manière *quelconque,* les nombres formant un couple soient toujours premiers entre eux. C'est le cas de :

$4 = 2^2$ $25 = 5^2$ $39 = 3 \times 13.$

On dit que ces nombres sont ***premiers entre eux deux à deux.***

Plusieurs nombres sont premiers entre eux deux à deux si, pris deux à deux d'une manière quelconque, les nombres considérés sont premiers entre eux.

REMARQUE. — Si des nombres sont premiers entre eux deux à deux, ils sont premiers entre eux dans leur ensemble. Mais, si des nombres sont premiers entre eux dans leur ensemble, ils peuvent ne pas être premiers entre eux deux à deux : c'est le cas de 8, 12, 9,

2. Quotients de plusieurs nombres par leur plus grand commun diviseur.

Calculons le plus grand commun diviseur D des nombres A = 1 260, B = 1 800, C = 132.

$$\left.\begin{array}{l} A = 1\,260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \\ B = 1\,800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \\ C = 132 = 2^2 \times 3 \times 11 \end{array}\right\} \textit{p.g.c.d.} \quad D = 2^2 \times 3 = 12.$$

Divisons chacun des nombres A, B, C par D, et écrivons les relations exprimant les divisions exactes en mettant en évidence les facteurs premiers du diviseur et ceux des quotients :

$$A = (2^2 \times 3) \times 3 \times 5 \times 7$$
$$B = (2^2 \times 3) \times 2 \times 3 \times 5^2$$
$$C = (2^2 \times 3) \times 11.$$

Les quotients obtenus sont :

$$A' = \frac{A}{D} = 3 \times 5 \times 7 \qquad B' = \frac{B}{D} = 2 \times 3 \times 5^2 \qquad C' = \frac{C}{D} = 11.$$

Or, le même facteur premier ne peut figurer *à la fois* dans ces trois quotients, car, s'il en était ainsi, ce facteur aurait dû figurer dans le *p. g. c. d.* Donc A', B' et C' sont premiers entre eux dans leur ensemble. D'où le théorème :

Théorème. — Quant on divise plusieurs nombres par leur plus grand commun diviseur, les quotients obtenus sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Dans l'exemple traité ci-dessus, les quotients :

$$A' = 3 \times 5 \times 7 = 105 \qquad B' = 2 \times 3 \times 5^2 = 150 \qquad C' = 11$$

sont premiers entre eux dans leur ensemble.

En particulier :

Les quotients de deux nombres par leur plus grand commun diviseur sont premiers entre eux.

Dans le cas des *deux nombres* 560 et 720, par exemple, dont le *p. g. c. d.* est 80, les quotients $\frac{560}{80} = 7$ et $\frac{720}{80} = 9$ sont premiers entre eux.

3. Quotients du plus petit commun multiple de plusieurs nombres par ces nombres.

Calculons le *p. p. c. m.* M des nombres A = 12, B = 315, C = 200.

$$\left.\begin{array}{l} A = 12 = 2^2 \times 3 \\ B = 315 = 3^2 \times 5 \times 7 \\ C = 200 = 2^3 \times 5^2 \end{array}\right\} \textit{p.p.c.m.} \quad M = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7.$$

Divisons M par chacun des nombres A, B, C et écrivons les relations exprimant les divisions exactes en mettant en évidence les facteurs premiers des diviseurs et ceux des quotients.

$$M = (2^2 \times 3) \times 2 \times 3 \times 5^2 \times 7$$
$$M = (3^2 \times 5 \times 7) \times 2^3 \times 5$$
$$M = (2^3 \times 5^2) \times 3^2 \times 7.$$

$$A' = \frac{M}{A} = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \qquad B' = \frac{M}{B} = 2^3 \times 5 \qquad C' = \frac{M}{C} = 3^2 \times 7.$$

Le même facteur premier ne peut figurer *à la fois* dans ces trois quotients, car, s'il en était ainsi, ce facteur aurait dû figurer dans le *p. p. c. m.* Donc A', B' et C' sont premiers entre eux dans leur ensemble. D'où le théorème :

Théorème. — Quand on divise le plus petit commun multiple de plusieurs nombres par ces nombres, les quotients obtenus sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Dans l'exemple traité ci-dessus, les quotients :

$$A' = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 1050 \qquad B' = 2^3 \times 5 = 40 \qquad C' = 3^3 \times 7 = 63$$

sont premiers entre eux dans leur ensemble.

En particulier :

Les quotients du plus petit commun multiple de deux nombres par ces nombres sont premiers entre eux.

Dans le cas de *deux nombres*, par exemple 28 et 35, dont le *p. p. c. m.* est 140, les quotients $\frac{140}{28} = 5$ et $\frac{140}{35} = 4$ sont premiers entre eux.

4. Théorème [1].

Si un nombre est divisible par plusieurs autres nombres premiers entre eux deux à deux, il est divisible par leur produit.

Supposons qu'un nombre N soit divisible par les nombres A, B, C, premiers entre eux deux à deux et qui, par conséquent, sont formés de *facteurs premiers tous différents*, par exemple :

$$A = 2 \times 3^2 = 18$$
$$B = 5$$
$$C = 7 \times 11 = 77.$$

Puisque N est divisible par A, il contient les facteurs 2 et 3^2 (20e leçon, § 1).
Puisque N est divisible par B, il contient le facteur 5.
Puisque N est divisible par C, il contient les facteurs 7 et 11.
Ces facteurs étant différents, N contient les facteurs 2, 3^2, 5, 7 et 11 et il est de la forme :

$$N = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times k$$

ou :

$$N = (2 \times 3^2) \times 5 \times (7 \times 11) \times k$$

ou :

$$N = (18 \times 5 \times 77) \times k$$
$$N = (A \times B \times C) \times k.$$

Le nombre N est donc divisible par le produit A × B × C, c'est-à-dire, dans l'exemple précédent, par 6 930.

• En particulier, ***si un nombre est divisible par deux nombres premiers entre eux, il est divisible par leur produit.***

5. Applications : nouveaux caractères de divisibilité.

Pour reconnaître si un nombre N est divisible par A, on examine s'il est divisible par des nombres premiers entre eux deux à deux a, b, c, tels que le produit $a \times b \times c$ soit égal à A.

EXEMPLES :

Si N est divisible par 2 et par 3, il est divisible par 6.
Si N est divisible par 4 et par 5, il est divisible par 20.
Si N est divisible par 2 et par 9, il est divisible par 18.
Si N est divisible par 3 et par 5, il est divisible par 15.
Si N est divisible par 3, par 4 et par 5, il est divisible par 60.

REMARQUE. — Le théorème précédent (§ 4) ne s'applique qu'au cas où a, b, c sont premiers entre eux deux à deux. Ainsi, le nombre 75, qui est divisible par 3 et par 15 (non premiers entre eux), n'est pas divisible par le produit 3 × 15, donc par 45.

---

(1) Ce paragraphe et le suivant ne seront étudiés que par les candidats à certains examens et concours.

EXERCICES

471. Montrer que deux nombres consécutifs sont premiers entre eux.

472. Montrer que deux nombres impairs consécutifs sont premiers entre eux.

473. Montrer que, si a et b sont premiers entre eux, a^2 et b^2 sont aussi premiers entre eux.

474. Montrer que, si a et b sont premiers entre eux, $(a + b)$ et $(a - b)$ sont premiers avec chacun de ces nombres.

475. Trouver deux nombres connaissant leur somme 480 et leur *p. g. c. d.* 15.

476. Trouver quatre nombres inférieurs à 201 et ayant pour *p. g. c. d.* 40.

477. Trouver deux nombres, compris entre 80 et 200, dont le *p. g. c. d.* soit 30 et leur différence 60.

478. En divisant 1 475 et 2 316 par un même diviseur, on obtient respectivement pour restes 5 et 6. Quel est ce diviseur? (*Plusieurs solutions* : les trouver toutes.)

479. Deux nombres ont pour *p. g. c. d.* 12. Le plus grand de ces nombres est 132. Trouver l'autre *(plusieurs solutions).*

480. Trouver le *p. g. c. d.* de deux nombres pairs consécutifs $2n$ et $2n + 2$.

481. Le produit de deux nombres est 3 024, leur *p. g. c. d.* est 12. Trouver leur *p. p. c. m.* Trouver les deux nombres. (*Plusieurs solutions* : les indiquer toutes).

482. Trouver deux nombres, connaissant leur produit 875 et leur *p. p. c. m.* 175.

483. Les nombres 1 262 et 1 535 sont-ils premiers entre eux? Calculer leur *p. p. c. m.* A quoi est égal le *p. p. c. m.* de deux nombres premiers entre eux?

484. Les nombres 99 et 101 sont-ils premiers entre eux? Calculer mentalement leur *p. p. c. m.*

485. Comment reconnaître si un nombre est divisible par 15? par 105? Donner des exemples.

486. Décomposer de toutes les manières possibles 60 en un produit de facteurs premiers entre eux deux à deux. En déduire les caractères de divisibilité par 60. Lequel emploierez-vous de préférence?

487. Montrer que le produit de trois nombres consécutifs est divisible par 6.

488. Montrer que le produit de trois nombres pairs consécutifs est divisible par 48.

489. Montrer que le produit de quatre nombres consécutifs est divisible par 24.

490. Montrer que, quel que soit l'entier n, le produit $n^2 (n + 1) (n - 1)$ est divisible par 12.

491. Montrer que, quel que soit l'entier n, le produit $n^2 (n^2 + 1) (n^2 - 1)$ est divisible par 60.

492. Montrer qu'un nombre impair est premier avec la moitié du nombre pair qui le précède immédiatement et avec la moitié du nombre pair qui le suit immédiatement.

PROBLÈMES SUR LE CHAPITRE II

Divisibilité. Nombres premiers.

493. Trouver le reste de la division par 9 de 46^5, de 35^8, de 32^7.

494. Quel est le reste de la division par 9 du produit $125^4 \times 214^3$?

495. Démontrer que la somme de deux nombres premiers, supérieurs à 2, n'est pas un nombre premier. Donner deux exemples.

496. Démontrer que, si $a^2 - b^2$ est égal à un nombre premier, les nombres a et b sont consécutifs. Donner deux exemples.

497. Déterminer le plus grand nombre de trois chiffres terminé par 8 et divisible par 9.

498. Déterminer le plus grand nombre de quatre chiffres terminé par 4 et divisible par 3.

499. Démontrer que le produit $n(n+2)(5n-1)(5n+1)$ est divisible par 24, quel que soit n.

500. Démontrer que le produit $ab(a^2+b^2)(a^2-b^2)$ est divisible par 30, quels que soient les nombres a et b.

501. Décomposer le produit

$$P = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \times 19 \times 20$$

en ses facteurs premiers.

Plus grand commun diviseur.

502. On veut débiter en tronçons d'égale longueur deux tiges cylindriques mesurant respectivement 144 *cm* et 90 *cm* de longueur. Quelle est la longueur des tronçons que l'on peut obtenir, sachant que cette longueur doit être supérieure à 10 *cm*?

503. Quatre pièces de ruban mesurent respectivement 504, 5 292, 5 544 et 3 276 *cm*. On découpe dans ces pièces des coupons de même longueur de telle sorte que chaque coupon ait la plus grande longueur possible. Trouver la longueur de chaque coupon et le nombre de coupons formés dans chaque pièce.

504. Trois manuels ayant respectivement 224, 288 et 352 pages sont composés de fascicules ayant chacun le même nombre de pages. Quel est le plus grand nombre de pages que l'on peut donner à un fascicule? Trouver le nombre de fascicules de chaque manuel.

505. Sur les côtés d'une propriété triangulaire, on veut planter des arbres espacés de 5 *m* au moins et de 10 *m* au plus. Les côtés mesurant 136 *m*, 152 *m*, 184 *m* et un arbre étant planté à chaque sommet du triangle, trouver le nombre d'arbres plantés.

506. On veut carreler une pièce rectangulaire de 320 *cm* sur 448 *cm* avec des carreaux carrés dont le côté est compris entre 15 et 20 *cm*. Calculer la longueur du côté du carreau et le nombre des carreaux employés.

507. Deux règles graduées, de même longueur, sont placées en face l'une de l'autre, de façon que leurs extrémités coïncident ; l'une est divisée en 2 160 parties égales, l'autre en 4 000. On déterminera par leurs numéros quels sont les traits des deux graduations qui sont exactement en face l'un de l'autre.

508. Sur une route rectiligne, il reste 4 arbres que l'on rencontre dans l'ordre A, B, C, D, et dont les distances successives sont : AB = 450 *m*, BC = 675 *m*, CD = 315 *m*. On veut planter d'autres arbres dans les intervalles de façon que tous, anciens et nouveaux, soient régulièrement espacés. Quel est l'intervalle maximum que l'on pourra donner à deux arbres consécutifs?

Quel est cet intervalle s'il est mesuré par un nombre entier de mètres et si le nombre des arbres nouvellement plantés est compris entre 200 et 300? Et combien y a-t-il alors d'arbres nouveaux?

509. On répartit 20 mains de 25 feuilles de papier entre les élèves d'un cours ; il reste 20 feuilles. Un autre jour, on répartit 25 mains entre les mêmes élèves et il reste 1 feuille. Combien le cours a-t-il d'élèves ?

510. Un négociant achète d'une part 2 775 *hl*, d'autre part 1 729 *hl* de vins de qualités différentes. Il veut loger ce vin, sans mélanger les qualités, dans des foudres de même contenance. Cette contenance doit être telle que le nombre de foudres pour chaque qualité soit le plus petit possible.

On demande : 1° la contenance de chaque foudre ; 2° le nombre de foudres employés pour chaque qualité.

Plus petit commun multiple.

511. Le produit du *p. g. c. d.* de deux nombres (et de deux nombres seulement) par leur *p. p. c. m.* étant égal au produit de ces deux nombres, indiquer comment on peut trouver directement le *p. p. c. m.* de deux nombres connaissant les deux nombres et leur *p. g. c. d.*

Application. — A = 140 B = 1 386 *p. g. c. d.* = 14.

512. Le produit de deux nombres est 172 800 ; leur *p. p. c. m.* est 1 440. Trouver leur *p. g. c. d.*

513. Deux cyclistes parcourent une piste circulaire en partant d'un même point au même instant. L'un la parcourt en 24 *mn*, l'autre en 18 *mn*.

1° Au bout de combien de temps passeront-ils ensemble au point de départ et combien de tours de piste auront-ils fait chacun ?

2° S'ils sont partis à 8 *h*, à quelle heure le plus rapide dépassera-t-il le deuxième pour la première fois ?

514. Trois coureurs parcourent un circuit routier. Le premier fait un tour en 24 *mn*, le second en 20 *mn*, le troisième en 18 *mn*. Ils partent en même temps du même point. Au bout de combien de temps passeront-ils ensemble sur la ligne de départ ?

515. Des autobus partent d'une gare routière dans trois directions différentes. Les départs se font respectivement toutes les 15 *mn*, les 18 *mn*, les 25 *mn*. Les autobus étant partis simultanément à 7 *h* du matin, à quelle heure y aura-t-il pour la première fois simultanément un départ pour ces trois lignes ?

Combien y aura-t-il eu de départs sur chaque ligne ?

516. Un phare émet trois signaux différents, le premier toutes les 16 *s*, le second toutes les 45 *s*, le troisième toutes les 2 *mn* 30 *s*. Ces trois signaux sont émis simultanément à minuit. A quels intervalles sont émis simultanément deux de ces signaux, 1er et 2e, ou 1er et 3e, ou 2e et 3e ?

A quels intervalles sont-ils émis simultanément ?

517. Deux escaliers gravissent la Tour Eiffel, dont la hauteur est 300 *m*. L'escalier Nord a des marches de 25 *cm* de hauteur ; l'escalier Sud a 1 650 marches égales entre elles. Combien, entre la base et le sommet de la Tour, les deux escaliers ont-ils de marches situées au même niveau ?

A quelle hauteur ces marches de même niveau sont-elles les unes au-dessus des autres ?

518. On a distribué des billes à 462 enfants d'une colonie scolaire ; tous les enfants en ont reçu le même nombre. Chemin faisant, ils rencontrent 168 camarades d'une autre colonie avec lesquels ils partagent leurs billes, de telle sorte qu'après le partage les parts de tous les enfants sont encore égales.

Quel est le plus petit nombre de billes que devait posséder chacun des 462 enfants pour que le partage soit possible dans ces conditions ?

Quelle est la part de chaque enfant après le second partage ?

CHAPITRE III

FRACTIONS ET NOMBRES DÉCIMAUX

Classe de Cinquième des Lycées et Collèges.

24. Notion de fraction.
25. Fractions égales.
26. Simplification des fractions.
27. Réduction des fractions au même dénominateur.
28. Multiplication des fractions.
29. Division des fractions.
30. Addition des fractions.
31. Soustraction des fractions.
32. Opérations sur les sommes, différences et produits de nombres entiers ou fractionnaires.
33. Fractions décimales. Nombres décimaux.
34. Opérations sur les nombres décimaux.
35. Quotient de deux nombres à une unité décimale près.

Classe de Quatrième.

36. Fractions ordinaires et nombres décimaux

24. NOTION DE FRACTION

I. Fraction d'une grandeur.

EXEMPLE. — Considérons un *segment de droite AB* (fig. 1). Divisons-le en 5 parties égales et désignons par *U* chacune des parties. Traçons maintenant le segment CD, égal à 7 segments *U*; autrement dit, multiplions par 7 le segment *U*.

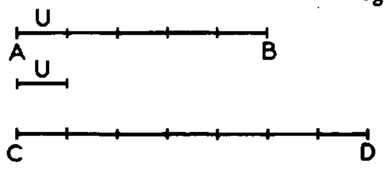


Fig. 1. — Le segment CD est une *fraction* du segment AB.

On dit que ***le segment CD est une fraction du segment AB.***

En procédant d'une manière analogue, on pourrait construire une *fraction d'un angle* (fig. 2) ou une *fraction d'un arc* (fig. 3), donc, d'une manière générale, une *fraction d'une grandeur quelconque.*

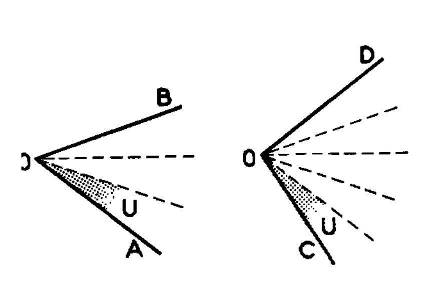


Fig. 2. — L'angle $\widehat{COD}$ est une ***fraction*** de l'angle $\widehat{AOB}$.

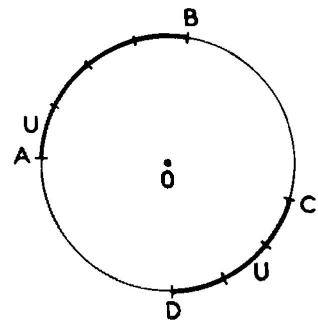


Fig. 3. — L'arc $\widehat{CD}$ est une ***fraction*** de l'arc $\widehat{AB}$ (du même cercle).

La construction d'une fraction d'une grandeur consiste donc en une *double opération* : une division, puis une multiplication.

Ainsi, dans le cas de la figure 1, la division de AB par 5 permet de construire *U* :

$$AB : 5 = U, \qquad (1)$$

puis la multiplication de *U* par 7 permet de construire CD :

$$U \times 7 = CD. \qquad (2)$$

Remplaçons dans cette égalité U par sa valeur exprimée dans l'égalité (1) :

$$(AB : 5) \times 7 = CD$$

ou

$$\boxed{CD = (AB : 5) \times 7}$$

Grâce à un *nouveau symbole*, appelé ***fraction***, formé des deux nombres 7 et 5 convenablement disposés, on peut écrire comme suit l'égalité ci-dessus :

$$\boxed{CD = AB \times \frac{7}{5}}$$

Notons que cette forme d'écriture rappelle celle qui est utilisée pour écrire, par exemple, qu'un segment MN est égal au produit d'un autre segment PQ par un ***nombre entier***, 3. Cette relation s'écrit, en effet :

$$MN = PQ \times 3,$$

et se lit : MN égale PQ multiplié par trois.

Par analogie, l'égalité : $CD = AB \times \frac{7}{5}$ se lit :

CD égale AB multiplié par sept cinquièmes.

Le symbole $\frac{7}{5}$, qui permet d'opérer la transformation du segment AB en un autre segment CD, a donc le rôle ***d'un opérateur :*** ce symbole indique les deux opérations à effectuer pour opérer la transformation de AB en CD.

REMARQUE. — On pourra démontrer, à titre d'exercice (nº 524), que les deux opérations indiquées par l'opérateur $\frac{7}{5}$ peuvent être effectuées dans un *ordre quelconque :* à partir d'un segment AB, on obtient *le même segment* CD.

2. Définition d'une fraction.

Une fraction est un couple de nombres entiers a ***et*** b ***écrits sous la forme*** $\frac{a}{b}$.

Cette fraction indique la double opération qui permet, par exemple, à partir d'un segment, d'obtenir un autre segment en divisant le premier en *b* parties égales, puis en multipliant par *a* le segment ainsi obtenu.

Les nombres *a* et *b* sont les ***termes*** de la fraction : *a* est le *numérateur* et *b* le *dénominateur*. On écrit le second de ces nombres au-dessous du premier en les séparant par un trait horizontal.

On lit une fraction en énonçant d'abord son numérateur, puis son dénominateur, que l'on fait suivre de la terminaison *ième*.

EXEMPLES : $\frac{5}{9}$ *(cinq neuvièmes)*; $\frac{11}{12}$ *(onze douzièmes)*.

Font exception les dénominateurs 2, 3 et 4 :

$\frac{1}{2}$ (un *demi*) ; $\frac{4}{3}$ (quatre *tiers*) ; $\frac{3}{4}$ (trois *quarts*).

Mais, de même que la fraction $\frac{5}{9}$ peut se lire : « *5 sur 9* », la fraction $\frac{a}{b}$ se lit « *a sur b* ».

3. Cas particuliers.

1° De la même manière qu'au paragraphe 1, construisons une fraction du segment AB, mais en choisissant pour ***diviseur 1*** et pour ***multiplicateur*** un nombre quelconque, 3 par exemple (fig. 4) :

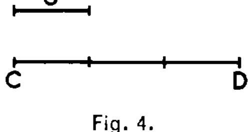


Fig. 4.

$$CD = (AB : 1) \times 3 = AB \times \frac{3}{1}.$$

Or CD est aussi le produit de AB par le nombre entier 3.

Il en résulte que la fraction $\frac{3}{1}$ est le nombre entier 3.

Plus généralement, ***tout nombre entier*** a ***peut être considéré comme une fraction de numérateur*** a ***et de dénominateur*** 1.

2° Le produit d'un nombre quelconque par 0 étant égal à 0 (3ᵉ leçon), l'opérateur $\frac{0}{b}$ (b étant un nombre quelconque) transforme un segment AB en un ***segment nul.*** Il en résulte que la fraction $\frac{0}{b}$ est le nombre zéro.

Toute fraction de numérateur nul est le nombre entier zéro.

3° La division d'un nombre a, non nul, par zéro étant ***impossible*** (12ᵉ leçon), l'expression $\frac{a}{0}$ n'a pas de signification.

4. Fractions inverses.

Dans l'exemple du paragraphe premier de cette leçon, nous avons envisagé la transformation du segment AB en un segment CD.

$$CD = AB \times \frac{7}{5}.$$

Si nous voulons, au contraire, opérer la transformation de CD en AB, nous divisons CD par 7, puis nous multiplions par 5 le segment obtenu U (fig. 1). D'où :

$$AB = CD \times \frac{5}{7}.$$

Les fractions $\frac{7}{5}$ et $\frac{5}{7}$ opèrent donc respectivement la transformation de AB en CD et, ***inversement,*** celle de CD en AB.

Pour cette raison, les deux fractions $\frac{7}{5}$ et $\frac{5}{7}$ sont dites ***inverses*** l'une de l'autre.

Plus généralement, ***l'inverse de la fraction*** $\frac{a}{b}$ ***est la fraction*** $\frac{b}{a}$.

En particulier, ***l'inverse d'un nombre entier*** n $\left(\text{ou } \frac{n}{1}\right)$ ***est la fraction*** $\frac{1}{n}$.

Il convient de noter qu'une fraction de la forme $\frac{0}{m}$, dans laquelle m n'est pas nul, n'a pas d'inverse.

EXERCICES

519. On donne un segment AB. Construire les segments :

$$CD = AB \times \frac{2}{3} \qquad C'D' = AB \times \frac{8}{5} \qquad C''D'' = AB \times \frac{3}{10}.$$

520. On donne l'arc de cercle AB limité aux deux extrémités d'un diamètre de ce cercle. Construire les arcs :

$$CD = AB \times \frac{1}{2} \qquad C'D' = AB \times \frac{3}{4} \qquad C''D'' = AB \times \frac{5}{8}.$$

521. On donne l'arc de cercle CD construit dans le précédent exercice. Construire les arcs :

$$EF = \frac{5}{4}\,CD \qquad E'F' = \frac{2}{3}\,CD \qquad E''F'' = \frac{11}{6}\,CD.$$

522. En utilisant les fractions, compléter les égalités suivantes (fig. 5) :

AC = AB ×	AC = CD ×	CD = AC ×	DF = CD ×
EB = AC ×	CD = EF ×	AB = CF ×	AB = ED ×

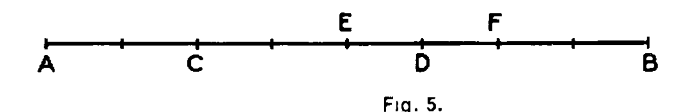


Fig. 5.

523. Écrire les fractions inverses des fractions suivantes :

$$\frac{3}{4} \quad \frac{11}{7} \quad \frac{9}{17} \quad 3 \quad \frac{1}{5} \quad \frac{12}{37} \quad \frac{1}{18}.$$

524. En étudiant la figure 1 de la leçon, montrer que les deux méthodes pour construire CD :

celle qui est exposée au paragraphe 1 : CD = (AB : 5) × 7
et celle qui se traduit par : C'D' = (AB × 7) : 5

conduisent au même résultat C'D' = CD.

25. FRACTIONS ÉGALES

1. Définition des fractions égales.

Étant donné un segment AB et une fraction, $\frac{2}{3}$ par exemple, construisons le segment CD tel que : $CD = AB \times \frac{2}{3}$ (fig. 1).

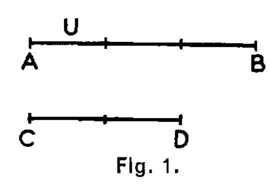


Fig. 1.

Nous allons chercher s'il existe d'*autres fractions* permettant de construire, à partir de AB, le *même segment* CD. De telles fractions, si elles existent, sont dites *égales* à $\frac{2}{3}$.

Des fractions sont égales si les segments qu'elles permettent de construire, à partir d'un même segment, sont égaux.

2. Recherche d'une fraction égale à une fraction donnée.

Reprenons l'exemple précédent : $CD = AB \times \frac{2}{3}$.

Divisons chacun des segments *U* de AB en deux parties, égales chacune à V : $U = 2\,V$ (fig. 2).

Donc :

$$AB = U \times 3 = 2\,V \times 3 = 6\,V$$
$$CD = U \times 2 = 2\,V \times 2 = 4\,V$$
$$\text{et } CD = (AB : 6) \times 4,$$

ou, d'après la définition des fractions :

$$CD = AB \times \frac{4}{6}.$$

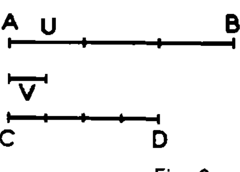


Fig. 2.

Puisque la multiplication de AB par l'une ou l'autre des fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{6}$ permet de construire le *même segment CD*, la fraction $\frac{4}{6}$ est égale à la fraction donnée $\frac{2}{3}$. Or la fraction $\frac{4}{6}$ a été obtenue en *multipliant par le même nombre* 2 les deux termes de la fraction $\frac{2}{3}$.

Si l'on s'était donné la fraction $\frac{4}{6}$, on obtiendrait la fraction $\frac{2}{3}$, qui lui est égale, en *divisant par le même nombre*, 2, les deux termes de la fraction $\frac{4}{6}$.

Plus généralement :

Si l'on multiplie, ou si l'on divise quand c'est possible, les deux termes d'une fraction par un même nombre, on obtient une fraction égale.

En appliquant cette règle, on peut donc écrire une infinité de fractions égales à une fraction donnée.

EXEMPLE : $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{14}{21} = \frac{20}{30} = \frac{30}{45} \ldots\ldots\ldots = \frac{2 \times n}{3 \times n}$.

Les fractions $\frac{4}{6}, \frac{14}{21}, \frac{20}{30}, \ldots \frac{2\,n}{3\,n}$ ont pour termes des *équimultiples* de 2 et 3.

Plus généralement :

$$\frac{a}{b} = \frac{2\,a}{2\,b} = \frac{3\,a}{3\,b} = \frac{4\,a}{4\,b} \ldots\ldots\ldots = \frac{na}{nb}.$$

REMARQUE. — Dans la suite des fractions écrites dans le paragraphe précédent, considérons les deux fractions $\frac{14}{21}$ et $\frac{20}{30}$.

Ces deux fractions sont égales ; pourtant les termes 20 et 30 de la seconde *ne sont pas des équimultiples* des termes 14 et 21 de la première.
Puisque deux fractions peuvent être égales sans que les termes de l'une soient les équimultiples des termes de l'autre, cherchons à établir une règle générale permettant de reconnaître l'égalité de deux fractions.

3. Comment reconnaître que deux fractions sont égales ?

1er cas. — Les dénominateurs des deux fractions sont égaux, à 5 par exemple (fig. 3).

Soient a et a' leurs numérateurs.

A partir du segment AB, les fractions $\frac{a}{5}$ et $\frac{a'}{5}$ permettent de construire les segments CD et C'D'. Or les segments CD et C'D' sont égaux s'ils comportent le même nombre de segments U, donc si : $a = a'$.

U
A B
C D (*a* segments)
C' D' (*a'* segments)

Fig. 3.

Alors, d'après la définition des fractions égales (§ 1), les fractions $\frac{a}{5}$ et $\frac{a'}{5}$ sont égales. Donc :

Deux fractions ayant même dénominateur sont égales si elles ont le même numérateur.

2e cas. — Les dénominateurs des deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ sont inégaux.

Multiplions les deux termes de la première fraction par le dénominateur de la seconde. Nous obtenons une fraction égale (§ 2) :

$$\frac{a \times b'}{b \times b'} = \frac{a}{b}.$$

Multiplions les deux termes de la seconde fraction par le dénominateur de la première. D'après le paragraphe 2 :

$$\frac{a' \times b}{b' \times b} = \frac{a'}{b'}.$$

Or, d'après le 1er cas ci-dessus, les fractions $\frac{a \times b'}{b \times b'}$ et $\frac{a' \times b}{b' \times b}$, qui ont le même dénominateur $b \times b'$ ou $b' \times b$, sont égales si leurs numérateurs sont égaux, donc si :

$$\boxed{ab' = a'b.}$$

L'égalité de ces fractions entraîne l'égalité des fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$. Donc :

Deux fractions sont égales si les produits obtenus en multipliant le numérateur de l'une par le dénominateur de l'autre sont égaux.

EXEMPLE : Les fractions $\frac{2}{30}$ et $\frac{13}{195}$ sont égales, car : $2 \times 195 =$ **390** et $30 \times 13 =$ **390**.

Par contre, les fractions $\frac{4}{17}$ et $\frac{5}{21}$ ne sont pas égales, car $4 \times 21 = 84$ et $17 \times 5 = 85$. Elles sont dites *inégales*.

4. Cas particuliers.

1° Fraction dont le numérateur est divisible par le dénominateur.

EXEMPLE : $\frac{120}{15}$.

Divisons les deux termes de cette fraction par le dénominateur 15 ; nous obtenons la fraction $\frac{8}{1}$, qui lui est égale. Or la fraction $\frac{8}{1}$ est elle-même égale au nombre entier 8. Donc, la fraction $\frac{120}{15}$ est égale au nombre entier 8.

Si le numérateur d'une fraction est divisible par son dénominateur, cette fraction est égale à un nombre entier qui est le quotient exact du numérateur par le dénominateur.

2° Fraction dont le numérateur et le dénominateur sont égaux.

EXEMPLE : $\frac{15}{15}$.

Cette fraction est égale au quotient exact de 15 par 15, c'est-à-dire à 1.

Plus généralement, $\frac{a}{a} = 1$, quel que soit a.

EXERCICES

525. Écrire cinq fractions égales à la fraction $\frac{7}{3}$; puis cinq fractions égales à $\frac{4}{7}$, mais dont le numérateur soit compris entre 90 et 150.

526. Écrire plusieurs fractions égales à $\frac{27}{36}$. Combien pouvez-vous écrire de fractions égales à $\frac{27}{36}$, mais ayant des termes plus petits?

527. On donne les fractions $\frac{15}{27}$ et $\frac{35}{63}$. Vérifier qu'elles sont égales :

1° en cherchant une fraction égale à chacune d'elles ;
2° en appliquant la règle donnée dans le paragraphe 3 de la leçon.

528. Même problème pour :

$\frac{56}{88}$ et $\frac{77}{121}$ $\quad$ $\frac{36}{32}$ et $\frac{45}{40}$ $\quad$ $\frac{28}{91}$ et $\frac{36}{117}$.

529. Montrer que les fractions suivantes sont inégales :

$\frac{55}{65}$ et $\frac{45}{55}$ $\quad$ $\frac{36}{48}$ et $\frac{28}{35}$ $\quad$ $\frac{52}{44}$ et $\frac{63}{54}$.

26. SIMPLIFICATION DES FRACTIONS

1. Simplification des fractions.

Rappelons que la suite des fractions égales à une fraction donnée est illimitée. Par exemple :

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{14}{21} = \frac{20}{30} = \frac{30}{45} \cdots$$

Considérons l'une de ces fractions, $\frac{14}{21}$ par exemple. Il y a intérêt, dans les calculs, à la remplacer par la fraction $\frac{2}{3}$, qui lui est égale, mais dont les termes sont plus petits, donc plus *simples*.

Simplifier une fraction, c'est trouver une fraction égale ayant des termes plus petits.

La règle à appliquer pour simplifier une fraction résulte de l'étude faite dans le paragraphe 2 de la leçon précédente.

Règle. — Pour simplifier une fraction, on divise, si c'est possible, ses deux termes par le même nombre.

EXEMPLES :

$$\frac{42}{198} = \frac{42 : 2}{198 : 2} = \frac{21}{99}$$

$$\frac{21}{99} = \frac{21 : 3}{99 : 3} = \frac{7}{33}.$$

La fraction $\frac{7}{33}$ ne peut plus être simplifiée, car ses deux termes n'ont aucun diviseur commun. On dit que l'on a réduit la fraction $\frac{42}{198}$ à ***sa plus simple expression*** $\frac{7}{33}$ et que la fraction $\frac{7}{33}$ est ***irréductible.***

2. Définition d'une fraction irréductible.

Une fraction est irréductible s'il n'existe pas de fraction égale ayant des termes plus petits.

Les deux termes d'une telle fraction n'ont donc *aucun diviseur commun*.

EXEMPLES :

$$\frac{2}{3} \quad \frac{7}{10} \quad \frac{6}{35} \quad \frac{21}{11} \quad \frac{8}{15} \quad \frac{102}{145}.$$

3. Exemples de simplification.

Pratiquement, on simplifie une fraction en divisant ses termes successivement par *leurs diviseurs communs* apparents (appliquer les caractères de divisibilité par 2, 5, 4, 25, 9 et 3).

EXEMPLE 1 : $\frac{360}{504} = \frac{360 : 9}{504 : 9} = \frac{40}{56}$ (divisions par 9)

$\frac{40}{56} = \frac{40 : 8}{56 : 8} = \frac{5}{7}$ (divisions par 8).

La fraction $\frac{5}{7}$ est irréductible.

EXEMPLE 2 : $\frac{462}{858} = \frac{462 : 2}{858 : 2} = \frac{231}{429}$ (divisions par 2)

$\frac{231}{429} = \frac{231 : 3}{429 : 3} = \frac{77}{143}$ (divisions par 3).

$\frac{77}{143} = \frac{77 : 11}{143 : 11} = \frac{7}{13}$ (divisions par 11).

La fraction $\frac{7}{13}$ est irréductible.

EXEMPLE 3 : $\frac{8 \times 12 \times 15}{25 \times 16}$

Les termes de la fraction sont des produits de facteurs.

Effectuer les produits serait une *maladresse* (perte de temps et cause d'erreur).

$\frac{8 \times 12 \times 15}{25 \times 16} = \frac{12 \times 15}{25 \times 2}$ (divisions par 8)

$\frac{12 \times 15}{25 \times 2} = \frac{12 \times 3}{5 \times 2}$ (divisions par 5)

$\frac{12 \times 3}{5 \times 2} = \frac{6 \times 3}{5 \times 1} = \frac{18}{5}$ (divisions par 2).

La fraction $\frac{18}{5}$ est irréductible.

On démontre que, pour une fraction réductible donnée, quel que soit l'ordre des simplifications, on trouve en définitive la *même fraction irréductible* (la démonstration sort du cadre de cette leçon).

4. Théorème (1).

Si une fraction est irréductible, ses termes sont premiers entre eux.

Soit $\frac{a}{b}$ une fraction irréductible. Si ses termes n'étaient pas premiers entre eux, ils admettraient un diviseur commun d. En divisant par d les deux termes a et b de la fraction $\frac{a}{b}$, on obtiendrait une nouvelle fraction $\frac{a'}{b'}$ égale à $\frac{a}{b}$ et ayant des termes plus petits que ceux de $\frac{a}{b}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Les termes de la fraction $\frac{a}{b}$ sont donc premiers entre eux.

(1) L'étude de ce paragraphe et du suivant ne pourra être faite qu'après celle du *p. g. c. d.* et des nombres premiers entre eux (Classe de 4e).

5. Théorème réciproque.

Si les termes d'une fraction sont premiers entre eux, cette fraction est irréductible.

1° La démonstration de cette propriété repose sur l'étude des termes d'une fraction égale à une fraction dont les termes sont premiers entre eux.

Soit la fraction $\frac{22}{15}$, dont les termes sont premiers entre eux et soit $\frac{n}{d}$ une fraction qui lui est égale :

$$\frac{22}{15} = \frac{n}{d}.$$

Multiplions par d les deux termes de la première fraction et par 15 ceux de la seconde ; les fractions obtenues sont égales :

$$\frac{22 \times d}{15 \times d} = \frac{n \times 15}{d \times 15}, \qquad \text{d'où :} \qquad 22 \times d = n \times 15. \qquad (1)$$

Décomposons en facteurs premiers les nombres *égaux* $22 \times d$ et $n \times 15$; nous obtenons les *mêmes facteurs premiers* affectés des *mêmes exposants*.

Soit p l'un des facteurs premiers de 15 ; il figure dans la décomposition de $n \times 15$, donc dans celle de $22 \times d$. Mais 15 et 22 étant premiers entre eux, le facteur p ne figure pas dans la décomposition de 22 : il ne peut donc figurer que dans la décomposition de d et il y est affecté d'un exposant au moins égal à celui qu'il a dans la décomposition de 15.

La même démonstration peut être faite pour chaque facteur premier de 15. Il en résulte que ***15 est un diviseur de d*** (20e leçon, § 1), ce qui peut s'écrire :

$$d = 15 \times k. \qquad (2)$$

Remplaçons d par $15 \times k$ dans l'égalité (1) :

$$22 \times 15 \times k = n \times 15$$

ou :

$$22 \times k = n$$

ou :

$$n = 22 \times k. \qquad (3)$$

Les égalités (2) et (3) montrent que n et d sont des multiples de 22 et 15 obtenus en faisant les produits de ces nombres par un même nombre entier k, ce qui s'énonce :

Si une fraction a ses termes premiers entre eux, toute fraction qui lui est égale a pour termes des équimultiples des termes de la fraction donnée.

2° Toute fraction égale à la fraction $\frac{22}{15}$ (dont les termes sont premiers entre eux) étant la forme de $\frac{22\,k}{15\,k}$, ses termes ne sont pas plus petits que 22 et 15 ; la fraction $\frac{22}{15}$ est donc *irréductible*, ce qui démontre le théorème réciproque énoncé.

6. Applications.

1° Puisque, en divisant deux nombres par leur *p. g. c. d.*, on obtient deux quotients qui sont premiers entre eux (23e leçon, § 2), ***pour réduire une fraction à sa plus simple expression, on divise ses deux termes par leur p. g. c. d.***

EXEMPLE : $\frac{330}{1\,386}$ $\left\{\begin{array}{l} 330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11 \\ 1\,386 = 2 \times 3^2 \times 7 \times 11 \end{array}\right\}$ $p.\ g.\ c.\ d. = 2 \times 3 \times 11 = 66.$

$$\frac{330}{1\,386} = \frac{330 : 66}{1\,386 : 66} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{21}} \quad \text{(fraction irréductible).}$$

2° Toute fraction égale à une fraction donnée, à $\frac{330}{1\,386}$ par exemple, étant égale à la fraction irréductible correspondante $\frac{5}{21}$, les termes de la fraction donnée sont des équimultiples de 5 et 21. Elle s'écrit $\frac{5k}{21k}$, le nombre k étant un nombre entier quelconque.

EXERCICES

Simplifier le plus possible les fractions :

530. $\frac{14}{40}$ $\frac{15}{25}$ $\frac{7}{49}$ $\frac{64}{16}$ $\frac{18}{64}$ $\frac{27}{30}$ $\frac{54}{48}$.

531. $\frac{91}{35}$ $\frac{630}{700}$ $\frac{720}{480}$ $\frac{225}{325}$ $\frac{240}{72}$ $\frac{390}{650}$ $\frac{278}{315}$.

532. $\frac{637}{1\,183}$ $\frac{984}{1\,476}$ $\frac{840}{3\,700}$ $\frac{50\,400}{90\,900}$ $\frac{333}{3\,333}$ $\frac{2\,121}{4\,848}$ $\frac{4\,949}{4\,900}$.

533. $\frac{30 \times 45}{18 \times 12}$ $\frac{12 \times 11 \times 26}{13 \times 6 \times 121}$ $\frac{20 \times 18 \times 32}{16 \times 12 \times 14 \times 9}$.

534. $\frac{8a}{12}$ $\frac{8a}{12a}$ $\frac{25m}{10m}$ $\frac{16a^2}{48a^3}$ $\frac{27am}{36a}$ $\frac{54xy^2}{36x^2y}$.

535. Réduire à leur plus simple expression les fractions :

$$\frac{5\,733}{11\,475} \quad \frac{19\,286\,148}{28\,929\,222}.$$

536. Trouver toutes les fractions égales à $\frac{360}{504}$ et ayant des termes plus petits.

537. Trouver toutes les fractions égales à $\frac{3}{4}$ et ayant pour numérateurs des nombres compris entre 50 et 80.

538. Trouver la fraction égale à $\frac{15}{21}$ et ayant pour dénominateur 35.

539. Trouver la fraction égale à $\frac{18}{21}$ et dont la somme des termes est 195.

540. Trouver la fraction égale à $\frac{55}{35}$ et dont la différence des termes est 28.

541. Trouver les fractions égales à $\frac{99}{45}$ et telles que la différence de leurs termes soit un multiple de 7.

542. Pourquoi les fractions $\frac{a}{a+1}$, $\frac{a-1}{a}$, $\frac{a}{2a+1}$, $\frac{3a+1}{2a+1}$ sont-elles irréductibles quel que soit a ?

27. RÉDUCTION DES FRACTIONS AU MÊME DÉNOMINATEUR

1. Réduction des fractions au même dénominateur.

Réduire des fractions au même dénominateur, c'est trouver des fractions respectivement égales aux fractions données et ayant toutes le même dénominateur, appelé dénominateur commun.

Il s'agit d'abord de déterminer un *dénominateur commun* qui soit un multiple commun des dénominateurs donnés, puis de calculer les fractions respectivement égales aux fractions données et qui ont pour dénominateur le dénominateur commun.

Puisqu'il existe une infinité de multiples communs à plusieurs nombres, le problème admet une infinité de solutions. Dans la pratique, on s'efforce de choisir la solution la plus simple. Les calculs sont d'ailleurs plus rapides si l'on a pris soin de simplifier, au préalable, les fractions données.

2. Exemples de réduction au même dénominateur.

EXEMPLE 1 : $\frac{7}{12}$ et $\frac{8}{15}$. (Ces fractions sont irréductibles).

Puisque le *produit des dénominateurs* 12 et 15 est un multiple commun à ces nombres, réduisons ces fractions au même dénominateur en multipliant les termes de chacune d'elles par le dénominateur de l'autre :

$$\frac{7}{12} = \frac{7 \times 15}{12 \times 15} = \frac{\mathbf{105}}{\mathbf{180}} \quad \text{et} \quad \frac{8}{15} = \frac{8 \times 12}{15 \times 12} = \frac{\mathbf{96}}{\mathbf{180}}.$$

EXEMPLE 2 : $\frac{18}{45}$, $\frac{21}{70}$ et $\frac{88}{66}$.

Réduisons les fractions à *leur plus simple expression* :

$$\frac{18}{45} = \frac{2}{5} \qquad \frac{21}{70} = \frac{3}{10} \qquad \frac{88}{66} = \frac{4}{3}.$$

Le nombre 30 est visiblement un multiple commun à 5, 10 et 3 ($30 = 5 \times 6$; $30 = 10 \times 3$; $30 = 3 \times 10$).

Nous trouvons ainsi les trois fractions :

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 6}{5 \times 6} = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{30}} \qquad \frac{3}{10} = \frac{3 \times 3}{10 \times 3} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{30}} \qquad \frac{4}{3} = \frac{4 \times 10}{3 \times 10} = \frac{\mathbf{40}}{\mathbf{30}}.$$

EXEMPLE 3. Cas particulier : un dénominateur est un **multiple** d'un autre.

$$\frac{6}{11} \quad \text{et} \quad \frac{13}{33}.$$

Le dénominateur 33 est un multiple de 11, car $33 = 11 \times 3$.

Donc, en multipliant par 3 les termes de la première fraction : $\frac{6 \times 3}{11 \times 3} = \frac{\mathbf{18}}{\mathbf{33}}$,

les deux fractions $\frac{18}{33}$ et $\frac{13}{33}$ ont le même dénominateur 33.

3. Réduction de fractions au plus petit dénominateur commun (1).

Celui-ci est *le plus petit* des multiples communs aux dénominateurs des fractions données (préalablement réduites à leur plus simple expression), donc le plus petit commun multiple de ces dénominateurs.

EXEMPLE : $\frac{72}{240}$, $\frac{28}{32}$ et $\frac{15}{36}$.

1° Réduisons ces fractions à leur plus simple expression :

$$\frac{3}{10}, \quad \frac{7}{8} \quad \text{et} \quad \frac{5}{12}.$$

2° Cherchons le *p. p. c. m.* des dénominateurs 10, 8 et 12 :

$$\left.\begin{array}{l} 10 = 2 \times 5 \\ 8 = 2^3 \\ 12 = 2^2 \times 3 \end{array}\right\} p.\ p.\ c.\ m. = 2^3 \times 3 \times 5 = 120.$$

3° Pour chaque fraction, calculons le quotient du p. p. c. m. par son propre dénominateur ; puis multiplions les deux termes de cette fraction par le quotient qui vient d'être trouvé.

$120 : 10 = 12$	$120 : 8 = 15$	$120 : 12 = 10$
$\frac{3 \times 12}{10 \times 12} = \mathbf{\frac{36}{120}}$	$\frac{7 \times 15}{8 \times 15} = \mathbf{\frac{105}{120}}$	$\frac{5 \times 10}{12 \times 10} = \mathbf{\frac{50}{120}}$.

EXERCICES

Réduire au même dénominateur les fractions :

543. $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{7}$ — $\frac{7}{27}$ et $\frac{4}{32}$ — $\frac{3}{18}$ et $\frac{18}{16}$ — $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{9}$.

544. $\frac{7}{3}$ et $\frac{3}{1}$ — $\frac{4}{1}$ et $\frac{18}{7}$ — $\frac{5}{9}$ et $\frac{1}{3}$ — $\frac{28}{7}$ et $\frac{4}{3}$.

545. $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$ et $\frac{15}{40}$ — $\frac{15}{17}$, $\frac{12}{50}$ et $\frac{1}{2}$ — $\frac{10}{7}$, $\frac{12}{9}$ et $\frac{16}{22}$.

546. $\frac{6}{27}$, $\frac{13}{26}$, $\frac{52}{72}$ et $\frac{28}{35}$ — $\frac{28}{77}$, $\frac{15}{35}$, $\frac{9}{45}$ et $\frac{21}{140}$.

547. $\frac{4 \times 5}{3 \times 7}$ et $\frac{1}{7 \times 5}$ — $\frac{8 \times 14}{7 \times 3}$ et $\frac{7}{24}$ — $\frac{6 \times 15}{7 \times 11}$ et $\frac{4 \times 9}{18 \times 5}$.

548. $\frac{5x}{36}$, $\frac{8x}{72}$ et $\frac{11x}{48}$ — $\frac{3a}{22}$, $\frac{5b}{77}$ et $\frac{a}{11}$ — $\frac{4a}{121}$, $\frac{9b}{135}$ et $\frac{3c}{111}$.

---

(1) L'étude de ce paragraphe ne pourra être faite qu'après celle du *p. p. c. m.* (Classe de 4e).

Réduire au plus petit dénominateur commun :

549. $\frac{4}{10}$, $\frac{3}{18}$ et $\frac{1}{100}$ $\qquad$ $\frac{7}{165}$, $\frac{171}{36}$ et $\frac{18}{25}$.

550. $\frac{52}{72}$, $\frac{26}{96}$, $\frac{76}{132}$ et $\frac{110}{144}$ $\qquad$ $\frac{10}{45}$, $\frac{91}{135}$, $\frac{41}{105}$ et $\frac{76}{120}$.

551. Quelles sont les fractions irréductibles égales à $\frac{48}{72}$ et ayant des termes plus petits ?

552. Trouver toutes les fractions égales à $\frac{9}{12}$ et ayant pour numérateurs des nombres compris entre 60 et 80.

553. Trouver une fraction égale au nombre entier 7 et dont la somme des termes soit 72.

554. Trouver deux fractions respectivement égales à $\frac{3}{5}$ et à $\frac{4}{7}$ et telles que le dénominateur de la première soit égal au numérateur de la deuxième.

555. Même problème pour les fractions $\frac{6}{20}$ et $\frac{4}{13}$.

556. Trouver quatre fractions respectivement égales à $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$ et $\frac{8}{9}$ telles que le dénominateur de chacune d'elles soit égal au numérateur de la suivante.

557. Trouver une fraction égale à $\frac{12}{100}$ et dont chaque terme soit le produit de deux des nombres figurant dans la liste ci-dessous (un facteur écrit dans l'un des termes ne pouvait pas être écrit dans l'autre) :

18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 ;
30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90 95 ;
100 110 120 150.

Nombre de solutions ?

558. Trouver *la plus petite fraction* dont les quotients par $\frac{15}{32}$ et par $\frac{25}{48}$ soient des nombres entiers. Comparer les termes de la fraction trouvée au *p. p. c. m.* des numérateurs et au *p. g. c. d.* des dénominateurs des deux fractions proposées.

559. Trouver *la plus grande fraction* qui soit contenue un nombre entier de fois dans chacune des fractions $\frac{18}{25}$, $\frac{12}{35}$. Comparer les termes de la fraction trouvée au *p. g. c. d.* des numérateurs et au *p. p. c. m.* des dénominateurs des deux fractions proposées.

28. MULTIPLICATION DES FRACTIONS

1. Définition du produit de deux fractions.

EXEMPLE. — Construisons, à partir d'un segment AB (fig. 1) :

— d'abord le segment $CD = AB \times \frac{4}{5}$ $\left(\text{produit de AB par } \frac{4}{5}\right)$;

— puis le segment $EF = CD \times \frac{2}{3}$ $\left(\text{produit de CD par } \frac{2}{3}\right)$.

A B

C D

$CD = AB \times \frac{4}{5}$

E F

$EF = CD \times \frac{2}{3}$

Fig. 1.

Nous pouvons obtenir directement le segment EF en faisant le produit du segment AB par une fraction $\frac{n}{d}$:

$$EF = AB \times \frac{n}{d}.$$

La fraction $\frac{n}{d}$ est, par définition, le produit des fractions $\frac{4}{5}$ et $\frac{2}{3}$.

Multiplier deux fractions, c'est calculer leur produit.
Ces fractions sont les *facteurs* du produit.

Nous allons montrer comment on calcule les termes de la fraction $\frac{n}{d}$.

2. Multiplication de deux fractions.

Reprenons l'exemple précédent et calculons le produit $\frac{n}{d}$ des fractions $\frac{4}{5}$ et $\frac{2}{3}$.

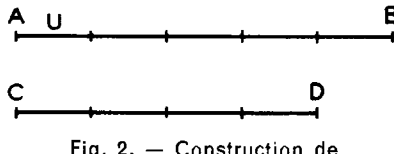


Fig. 2. — Construction de CD = (AB : 5) × 4.

1° Pour construire $CD = AB \times \frac{4}{5}$ ou CD = (AB : 5) × 4, (24e leçon) divisons AB en 5 parties égales et prenons 4 de ces parties. En désignant par *U* l'une des parties, c'est-à-dire (AB : 5), nous obtenons : CD = *U* × 4 (fig. 2).

2° Pour construire $EF = CD \times \frac{2}{3}$ ou EF = (CD : 3) × 2, divisons d'abord CD en 3 parties égales. La figure 3 indique la méthode utilisée : on divise U en 3 parties égales, chacune étant désignée par V, et, puisque CD = *U* × 4, on prend 4 de ces parties.

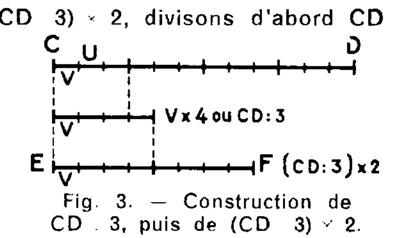


Fig. 3. — Construction de CD : 3, puis de (CD : 3) × 2.

Le segment EF, qui est égal à (CD : 3) × 2, est formé de 4 × 2 = 8 segments V.

3° Si l'on remarque que le segment AB est formé de $3 \times 5 = 15$ segments V, l'égalité $EF = (AB : 15) \times 8$ montre que la fraction cherchée $\frac{n}{d}$ est égale à $\frac{8}{15}$, ou encore à $\frac{4 \times 2}{3 \times 5}$ ou $\frac{4 \times 2}{5 \times 3}$ (fig. 4).

A B

E F EF=(AB:15)x8

Fig. 4. — $EF = (AB : 15) \times 8$.

Donc :

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3}.$$

Nous pouvons énoncer la règle :

Le produit de deux fractions est la fraction qui a pour numérateur le produit des numérateurs et pour dénominateur le produit des dénominateurs.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

EXEMPLES. — On simplifie, s'il y a lieu, les fractions données, puis les fractions dont les termes sont des produits avant d'effectuer les produits.

$$\frac{6}{14} \times \frac{10}{11} = \frac{3}{7} \times \frac{10}{11} = \frac{3 \times 10}{7 \times 11} = \mathbf{\frac{30}{77}}$$

$$\frac{14}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{14 \times 3}{5 \times 7} = \frac{2 \times 3}{5} = \mathbf{\frac{6}{5}}$$

$$\frac{9}{25} \times \frac{5}{3} = \frac{9 \times 5}{25 \times 3} = \mathbf{\frac{3}{5}}.$$

$$\frac{3}{10} \times \frac{20}{3} = \frac{3 \times 20}{10 \times 3} = \mathbf{2}.$$

REMARQUE. — Puisque la multiplication des nombres entiers est commutative, ($a \times c = c \times a$ et $b \times d = d \times b$), il en résulte que $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$.

La multiplication des fractions est également une opération commutative.

3. Cas particuliers.

1° Multiplication d'une fraction par un nombre entier.

En considérant le nombre entier comme une fraction de dénominateur 1, nous avons par exemple :

$$\frac{3}{7} \times 5 = \frac{3}{7} \times \frac{5}{1} = \frac{3 \times 5}{7 \times 1} = \mathbf{\frac{15}{7}}.$$

Plus généralement :

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b}.$$

Si c est un diviseur de b :

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a}{b : c}.$$

EXEMPLE : $\frac{5}{12} \times 3 = \frac{5}{12 : 3} = \mathbf{\frac{5}{4}}$.

2° Multiplication d'un nombre entier par une fraction.

De la même manière :

$$\boldsymbol{a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}}.$$

EXEMPLE : $3 \times \frac{5}{8} = \frac{15}{8}$.

3° Multiplication de deux fractions inverses (définies dans la 24e leçon).

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = 1.$$

Le produit de deux fractions inverses est égal à 1.

EXEMPLE : $\frac{5}{9} \times \frac{9}{5} = \frac{5 \times 9}{9 \times 5} = 1$.

4. Produit de plusieurs fractions.

Par définition : $$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f}$$

En application de la règle du paragraphe 2 :

$$\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \times \frac{e}{f} = \frac{a \times c}{b \times d} \times \frac{e}{f} = \frac{(a \times c) \times e}{(b \times d) \times f}.$$

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{a \times c \times e}{b \times d \times f}}.$$

Le produit de plusieurs fractions est une fraction qui a pour numérateur le produit des numérateurs et pour dénominateur le produit des dénominateurs.

EXEMPLE : $\frac{4}{3} \times \frac{9}{5} \times \frac{25}{16} = \frac{4 \times 9 \times 25}{3 \times 5 \times 16} = \frac{1 \times 3 \times 5}{1 \times 1 \times 4} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{4}}$.

Comme pour les nombres entiers, on démontre que la multiplication de plusieurs fractions est une ***opération commutative*** et une opération ***associative.***

5. Puissance d'une fraction.

Lorsque tous les facteurs d'un produit sont égaux à une même fraction, on dit que ce produit est une ***puissance de cette fraction.***

En particulier :

$\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ est le ***carré*** de $\frac{a}{b}$ (deux facteurs)

$\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)$ est le ***cube*** de $\frac{a}{b}$ (trois facteurs).

On notera que, pour indiquer l'élévation d'une fraction à une puissance, il est indispensable d'écrire cette fraction ***entre parenthèses.***

Pour calculer une puissance d'une fraction, appliquons la règle de multiplication des fractions.

EXEMPLES : $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a}{b \times b} = \frac{a^2}{b^2}.$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a \times a}{b \times b \times b} = \frac{a^3}{b^3}.$$

Plus généralement :

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

Règle. — Une puissance d'une fraction est la fraction obtenue en élevant à cette puissance les deux termes de la fraction.

6. Produit de deux puissances d'une même fraction.

EXEMPLE : $P = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3.$

Calculons chacun des deux facteurs du produit P en appliquant la règle précédente :

$$P = \frac{4^2}{5^2} \times \frac{4^3}{5^3}$$

Effectuons le produit des deux fractions :

ou $$P = \frac{4^2 \times 4^3}{5^2 \times 5^3}$$

D'après la règle de multiplication des puissances d'un nombre entier :

$$P = \frac{4^{2+3}}{5^{2+3}} = \frac{4^5}{5^5} = \left(\frac{4}{5}\right)^5.$$

Plus généralement :

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}.}$$

Règle. — Le produit de deux puissances d'une même fraction est la puissance de cette fraction dont l'exposant est la somme des exposants des deux puissances.

EXERCICES

Calculer :

560. $\frac{3}{7} \times \frac{2}{11}$ $\quad \frac{6}{15} \times \frac{4}{3}$ $\quad \frac{115}{22} \times \frac{33}{7}$ $\quad \frac{8}{16} \times \frac{45}{95}$.

561. $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{9}{7}$ $\quad \frac{8}{7} \times \frac{6}{12} \times \frac{14}{4}$ $\quad \frac{116}{13} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ $\quad \frac{7}{5} \times \frac{10}{14} \times \frac{1}{3}$.

562. $\frac{4}{9} \times 5$ $\quad \frac{8}{25} \times 15$ $\quad 12 \times \frac{13}{15}$ $\quad 16 \times \frac{20}{7}$.

563. $2 \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$ $\quad \frac{3}{10} \times 4 \times \frac{7}{2}$ $\quad \frac{8}{25} \times \frac{9}{4} \times 5$ $\quad \frac{3}{10} \times \frac{100}{9} \times 10$.

564. $\frac{a}{9} \times \frac{a}{2}$ $\quad \frac{2a}{5} \times \frac{a}{3}$ $\quad \frac{8a}{5} \times \frac{7b}{16}$ $\quad \frac{9a}{12} \times b$.

565. $\frac{3a}{5} \times 7$ $\quad \frac{8a}{11} \times 2$ $\quad \frac{9a}{8} \times 16$ $\quad \frac{5a}{25} \times 10$.

Calculer les puissances :

566. $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ $\quad \left(\frac{3}{4}\right)^3$ $\quad \left(\frac{1}{9}\right)^2$ $\quad \left(\frac{5}{7}\right)^3$.

567. $\frac{5^2}{2}$ et $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ $\quad \frac{3}{2^2}$ et $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ $\quad \frac{1}{4^3}$ et $\left(\frac{1}{4}\right)^3$ $\quad \frac{2}{3^3}$ et $\left(\frac{2}{3}\right)^3$.

568. Appliquer la règle de multiplication des puissances d'une fraction à :

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3$ $\quad \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right) \times \left(\frac{a}{b}\right)^3$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 \times \left(\frac{a}{b}\right)^5$.

569. Calculer :

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^2$ $\quad \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2$ $\quad \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3$ $\quad \frac{9}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2}$.

570. Par quelles fractions faut-il multiplier un nombre :

1° pour l'augmenter de ses $\frac{4}{5}$?

2° pour le diminuer de ses $\frac{5}{8}$?

571. Le produit de deux nombres entiers est 192. Que devient ce produit quand on multiplie chacun des nombres par $\frac{3}{4}$?

572. En multipliant un nombre par $\frac{5}{7}$, on obtient un résultat inférieur de 48 au nombre lui-même. Trouver ce nombre.

573. La valeur d'une machine diminue en une année du 1/5 de ce qu'elle était au début de l'année. Calculer la valeur au bout de 1 an, de 2 ans, de 3 ans, de 4 ans, d'une machine payée 35 000 F.

29. DIVISION DES FRACTIONS

1. Problème de la division.

La division des nombres entiers a été définie comme l'*opération inverse* de la multiplication (12e leçon) ; le *quotient exact* de deux nombres entiers a et b est, lorsqu'il existe, le nombre q dont le produit par b est égal à a :

$$a = b \times q.$$

Appliquons aux fractions la *même* définition : ***le quotient d'une première fraction par une seconde fraction est, si elle existe, la fraction dont le produit par la seconde est égal à la première.***

Le quotient q de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$ est, s'il existe, tel que :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \times q.$$

On écrit :

$$q = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}.$$

La division d'une fraction par une autre fraction permet de calculer le quotient de la première par la seconde.

2. Calcul du quotient de la fraction $\frac{a}{b}$ par la fraction $\frac{c}{d}$.

EXEMPLE. $\frac{4}{5} : \frac{3}{7}$.

Diviser la fraction (dividende) $\frac{4}{5}$ par la fraction (diviseur) $\frac{3}{7}$, c'est chercher, si c'est possible, la fraction (quotient) $\frac{n}{d}$ telle que :

$$\frac{n}{d} \times \frac{3}{7} = \frac{4}{5},$$

Appliquons la règle de multiplication des fractions aux deux premières :

$$\frac{n \times 3}{d \times 7} = \frac{4}{5}.$$

Multiplions les deux fractions égales $\frac{n \times 3}{d \times 7}$ et $\frac{4}{5}$ par $\frac{7}{3}$, qui est *l'inverse* de la fraction diviseur $\frac{3}{7}$. Nous obtenons des produits égaux :

$$\frac{n \times 3}{d \times 7} \times \frac{7}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{7}{3}.$$

Appliquons au premier de ces produits la règle de multiplication des fractions :

$$\frac{n \times 3 \times 7}{d \times 7 \times 3} = \frac{4}{5} \times \frac{7}{3}$$

Nous obtenons, après simplification : $\frac{n}{d} = \frac{4}{5} \times \frac{7}{3}$.

Nous pouvons donc, en généralisant, énoncer la règle:

Le quotient d'une fraction par une fraction est égal au produit de la fraction dividende par l'inverse de la fraction diviseur.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

La division des fractions est donc possible, à la seule condition que le diviseur ne soit pas nul.

EXEMPLES :

$$\frac{5}{4} : \frac{3}{8} = \frac{5}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

$$\frac{10}{7} : \frac{1}{3} = \frac{10}{7} \times \frac{3}{1} = \frac{30}{7}$$

$$\frac{25}{12} : \frac{5}{4} = \frac{25}{12} \times \frac{4}{5} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{14}{5} : \frac{7}{30} = \frac{14}{5} \times \frac{30}{7} = 12.$$

3. Cas particuliers.

1° Quotient d'une fraction par un nombre entier.

En considérant le nombre entier comme une fraction de dénominateur 1, nous avons par exemple :

$$\frac{9}{5} : 4 = \frac{9}{5} : \frac{4}{1} = \frac{9}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{20}.$$

Plus généralement :

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c}$$

ou :

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \times c}.$$

Si c est diviseur de a, par simplification du résultat précédent, on obtient :

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b}$$

EXEMPLE. $\frac{18}{7} : 9 = \frac{18 : 9}{7} = \frac{2}{7}$.

2° Quotient d'un nombre entier par une fraction.

De la même manière : $a : \frac{c}{d} = a \times \frac{d}{c}$

ou :

$$a : \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{c}.$$

EXEMPLE. $3 : \frac{5}{7} = 3 \times \frac{7}{5} = \frac{3 \times 7}{5} = \frac{21}{5}$.

3° Quotient du nombre 1 par une fraction.

Comme dans le cas précédent :

$$1 : \frac{c}{d} = 1 \times \frac{d}{c}$$

d'où :

$$\boxed{1 : \frac{c}{d} = \frac{d}{c}.}$$

En divisant 1 par la fraction $\frac{c}{d}$, on obtient donc la fraction inverse de $\frac{c}{d}$.

L'inverse d'une fraction est le quotient de 1 par cette fraction.

4. Quotient de deux puissances d'un même nombre.

Soit à calculer le quotient exact de a^m par a^n, les exposants m et n étant des nombres entiers. Par définition, ce quotient est égal à la fraction $\frac{a^m}{a^n}$, fraction que l'on peut simplifier. Trois cas se présentent :

1er cas. $m = n$. EXEMPLE : $\frac{a^5}{a^5} = 1$, quel que soit le nombre a.

2e cas. $m > n$. EXEMPLE : $\frac{a^5}{a^3}$.

Divisons par a^3 les deux termes de la fraction :

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a^2}{1} = a^2 \quad (\text{soit } a^{5-3}).$$

Plus généralement :

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.}$$

3e cas. $m < n$. EXEMPLE : $\frac{a^2}{a^6}$.

Divisons par a^2 les deux termes de la fraction :

$$\frac{a^2}{a^6} = \frac{1}{a^4} \quad \left(\text{soit } \frac{1}{a^{6-2}}\right).$$

Plus généralement :

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}.}$$

5. Quotient exact de deux nombres entiers.

En général, le calcul du quotient exact de deux nombres entiers a et b n'est pas un nombre entier. Par exemple, il est impossible de trouver un nombre entier qui soit le quotient exact de 7 par 3. Mais, en appliquant la règle de division des fractions à ces deux nombres, considérés comme des *fractions de dénominateur* 1, on obtient :

$$7 : 3 = \frac{7}{1} : \frac{3}{1} = \frac{7}{1} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Plus généralement : $a : b = \frac{a}{1} : \frac{b}{1} = \frac{a}{1} \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$

D'où la définition :

Le quotient exact de deux nombres entiers a et b est la fraction $\frac{a}{b}$.

Dans le cas particulier où a est un multiple de b, alors égal à $b \times n$, le quotient exact $\frac{a}{b}$ s'écrit $\frac{b \times n}{b} = \frac{n}{1} = n$. Le nombre entier n est le quotient exact de deux nombres entiers, défini dans la 12e leçon.

6. Nouveau symbole de la division.

Nous pouvons donc utiliser le **symbole** « — » (trait de fraction) pour indiquer la division exacte d'un nombre entier par un autre nombre entier, au lieu du symbole « : ».

Par exemple, $\frac{7}{3}$ représente à la fois une fraction et l'indication du quotient de 7 par 3.

EXERCICES

Calculer :

574. $\frac{4}{7} : \frac{3}{10}$ $\quad \frac{16}{24} : \frac{5}{8}$ $\quad \frac{15}{4} : \frac{9}{2}$ $\quad \frac{14}{40} : \frac{2}{7}.$

575. $\frac{13}{65} : \frac{4}{7}$ $\quad \frac{50}{16} : \frac{4}{9}$ $\quad \frac{11}{23} : \frac{12}{16}$ $\quad \frac{36}{108} : \frac{9}{5}.$

576. $\frac{12}{7} : 5$ $\quad \frac{4}{9} : 12$ $\quad \frac{13}{26} : 2$ $\quad \frac{16}{5} : 8.$

577. $13 : \frac{1}{2}$ $\quad 15 : \frac{5}{3}$ $\quad 24 : \frac{12}{24}$ $\quad 72 : \frac{4}{5}.$

578. $1 : \frac{4}{15}$ $\quad 1 : \frac{12}{36}$ $\quad 1 : \frac{100}{105}$ $\quad 1 : \frac{7}{112}.$

579. $\frac{a}{5} : \frac{3}{4}$ $\quad \frac{2a}{7} : \frac{5}{11}$ $\quad \frac{8a}{9} : \frac{3}{a}$ $\quad \frac{6a}{5} : \frac{4a}{11}.$

580. $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$ $\quad \frac{a}{2b} : \frac{3a}{5b}$ $\quad 5 : \frac{2a}{7}$ $\quad 1 : \frac{8a}{12}.$

581. $\frac{5ab}{2} : \frac{b}{5}$ $\quad \frac{5a^2}{2} : \frac{a}{4}$ $\quad \frac{a^2}{b^2} : \frac{a}{2b}$ $\quad \frac{a^3}{b^3} : \frac{2a^2}{b^2}.$

582. Simplifier les fractions :

$$\frac{a^6}{a^6} \quad \frac{a^9}{a^5} \quad \frac{a^4}{a^5} \quad \frac{a}{a^5}.$$

583. Calculer :

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 : \left(\frac{3}{4}\right)^2 \qquad 3^3 : \left(\frac{1}{5}\right)^2 \qquad \left(\frac{1}{4}\right)^3 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 \qquad \left(\frac{3}{7}\right)^2 : 3.$$

584. Une vis avance de $\frac{3}{4}$ *mm* par tour. Combien de tours doit-elle faire pour avancer de 1 *mm* ? de 3 *mm* ? de $\frac{10}{3}$ *mm* ?

30. ADDITION DES FRACTIONS

1. Somme de fractions.

EXEMPLE. — Construisons, à partir d'un segment AB, les deux segments :

$CD = AB \times \frac{2}{5}$ $\left(\text{produit de AB par } \frac{2}{5}\right)$

et :

$EF = AB \times \frac{3}{4}$ $\left(\text{produit de AB par } \frac{3}{4}\right)$.

puis le segment CF, qui est la *somme* de ces deux derniers segments (fig. 1).

A B

C D

E F

Somme

C D

E F

Fig. 1.

Si le segment CF est le produit du segment AB par une fraction $\frac{n}{d}$, ce qui s'écrit :

$$CF = AB \times \frac{n}{d},$$

nous pouvons dire que *la fraction* $\frac{n}{d}$ *est la somme des fractions* $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{4}$.

$$\frac{n}{d} = \frac{2}{5} + \frac{3}{4}.$$

Additionner des fractions, c'est calculer leur somme.

2. Addition de fractions ayant le même dénominateur.

EXEMPLE : $\frac{n}{d} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5}$.

A partir d'un segment AB, construisons les segments $AB \times \frac{3}{5}$, $AB \times \frac{4}{5}$ et $AB \times \frac{2}{5}$, puis la somme ST de ces trois segments (fig. 2).

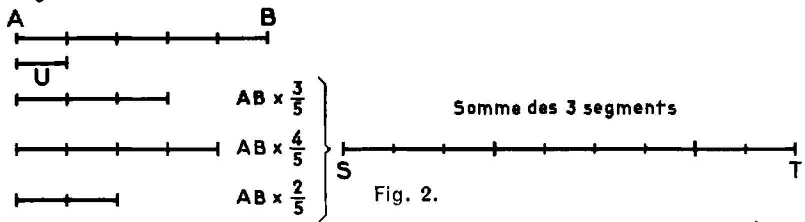


Fig. 2.

Puisque les trois segments $AB \times \frac{3}{5}$, $AB \times \frac{4}{5}$ et $AB \times \frac{2}{5}$ contiennent respectivement 3, 4 et 2 fois le segment *U*, égal à AB : 5, leur somme contient (3 + 4 + 2) fois le segment *U*. D'où :

$ST = (AB : 5) \times (3 + 4 + 2)$ ou $ST = (AB : 5) \times 9$ ou $ST = AB \times \frac{9}{5}$.

La fraction $\frac{n}{d}$ est donc égale à $\frac{9}{5}$.

Puisque cette fraction a le *même dénominateur*, 5, que les trois fractions données et qu'elle a pour numérateur la *somme* $3 + 4 + 2 = 9$ de leurs numérateurs, on peut, en généralisant, énoncer la règle suivante :

La somme de plusieurs fractions ayant même dénominateur est la fraction qui a pour numérateur la somme des numérateurs et pour dénominateur le dénominateur commun.

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{d}.$$

3. Addition de fractions n'ayant pas le même dénominateur.

Puisque l'on peut remplacer ces fractions par des fractions qui leur sont respectivement égales, on ramène ce problème au précédent en réduisant préalablement au *même dénominateur* les fractions données.

EXEMPLE :

$$\frac{2}{3} + \frac{7}{4} + \frac{5}{8} = \frac{16}{24} + \frac{42}{24} + \frac{15}{24}$$
$$= \frac{16 + 42 + 15}{24}$$
$$= \frac{73}{24}.$$

4. Cas particulier : addition d'un nombre entier et d'une fraction.

EXEMPLE : $5 + \frac{2}{3}$.

Le nombre entier 5 étant égal à la fraction $\frac{5}{1}$ (24e leçon), réduisons cette fraction et la fraction $\frac{2}{3}$ au même dénominateur, 3, puis appliquons la règle précédente :

$$\frac{5 \times 3}{1 \times 3} + \frac{2}{3} = \frac{15 + 2}{3} = \frac{17}{3}.$$

5. Remarques.

1° Les additions de fractions se ramènent à des additions de *nombres entiers* qui sont les numérateurs des fractions réduites au même dénominateur.

Les propriétés des sommes de fractions sont donc *les mêmes* que celles des sommes de nombres entiers (2e leçon) : l'addition des fractions est une ***opération commutative*** et une ***opération associative***.

2° L'application de la règle (§ 2 ci-dessus) permet d'écrire : $\frac{a}{b} + \frac{0}{b} = \frac{a}{b}$.

Or, la fraction $\frac{0}{b}$ étant égale à zéro, il en résulte que le nombre zéro est ***élément neutre*** pour l'addition des fractions.

EXERCICES

Additionner :

585. $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{3}$ — $\frac{9}{4}, \frac{7}{4}$ et $\frac{20}{4}$ — $\frac{7}{15}$ et $\frac{4}{25}$ — $\frac{18}{30}$ et $\frac{28}{20}$.

586. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$ — $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$ et $\frac{1}{9}$ — $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1\,000}$ et $\frac{1}{10\,000}$.

587. 2 et $\frac{1}{2}$ — 5 et $\frac{2}{7}$ — 3 et $\frac{9}{5}$ — $\frac{8}{17}$ et 1.

588. 2, $\frac{1}{2}$, 3, $\frac{1}{3}$ — 5, $\frac{5}{2}$, 7 et $\frac{7}{4}$ — 10, $\frac{1}{10}$, 100 et $\frac{1}{100}$.

Calculer :

589. $\frac{a}{5} + \frac{a}{15}$ — $\frac{a}{15} + \frac{a}{20} + \frac{a}{25}$ — $\frac{3a}{7} + \frac{a}{5} + \frac{11a}{70} + \frac{8a}{35}$.

590. $\frac{a}{9} + \frac{b}{12} + \frac{a}{18} + \frac{b}{27}$ — $\frac{3a}{25} + \frac{5b}{35} + \frac{a}{20}$ — $\frac{8a}{7} + \frac{15b}{21} + \frac{3a}{14} + \frac{5b}{42}$.

591. $a + \frac{2a}{3}$ — $a + \frac{5a}{6} + 3a$ — $2b + \frac{5b}{7} + \frac{b}{8}$.

592. Calculer $1 + \frac{1}{2}$, puis l'inverse de la somme obtenue.

593. Calculer $1 + \frac{1}{3}$, puis $\frac{1}{1 + \frac{1}{3}}$, puis $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}$, enfin $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$.

31. COMPARAISON DES FRACTIONS SOUSTRACTION DES FRACTIONS

1. Fractions inégales.

Considérons les segments CD et EF obtenus respectivement en multipliant le segment AB par les fractions $\frac{n}{d}$ et $\frac{n'}{d'}$. Quand le segment CD est plus *grand* que le segment EF, on dit que la fraction $\frac{n}{d}$ est *plus grande* que la fraction $\frac{n'}{d'}$ (fig. 1).

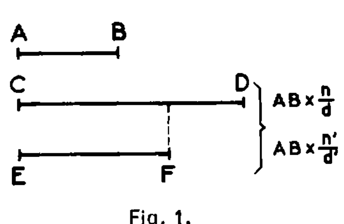


Fig. 1.

Par définition, ***une fraction $\frac{n}{d}$ est plus grande qu'une fraction $\frac{n'}{d'}$, si le segment obtenu en multipliant AB par $\frac{n}{d}$ est plus grand que le segment obtenu en multipliant AB par $\frac{n'}{d'}$.***

2. Comment comparer deux fractions ?

1er cas. — ***Les fractions ont le même dénominateur***, par exemple $\frac{7}{4}$ et $\frac{5}{4}$.

Soit un segment quelconque AB (fig. 2). En multipliant AB par $\frac{7}{4}$ et AB par $\frac{5}{4}$, nous obtenons les segments :

$$CD = AB \times \frac{7}{4} = \frac{AB}{4} \times 7 = U \times 7$$

$$EF = AB \times \frac{5}{4} = \frac{AB}{4} \times 5 = U \times 5.$$

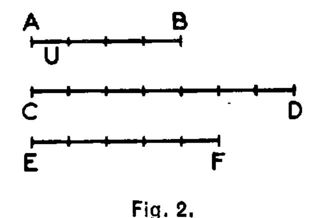


Fig. 2.

Or, le segment $U \times 7$ est ***plus grand*** que le segment $U \times 5$; la fraction $\frac{7}{4}$ est donc ***plus grande*** que la fraction $\frac{5}{4}$.

Plus généralement, $n > n'$ entraîne $\frac{n}{d} > \frac{n'}{d}$, ce qui s'énonce :

Si deux fractions ont le même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.

2e cas. — Les fractions n'ont pas le même dénominateur.

On applique la règle précédente après avoir réduit les fractions au même dénominateur.

EXEMPLE : $\frac{8}{11}$ et $\frac{5}{9}$.

$$\frac{8}{11}=\frac{8\times 9}{11\times 9}=\frac{72}{99} \quad \text{et} \quad \frac{5}{9}=\frac{5\times 11}{9\times 11}=\frac{55}{99}.$$

Puisque : $\frac{72}{99}>\frac{55}{99}$, on a : $\frac{8}{11}>\frac{5}{9}$.

Cas particulier. — Les fractions ont le même numérateur.

Comparons :

$$\frac{n}{d} \text{ et } \frac{n}{d'}.$$

Réduisons-les au même dénominateur :

$$\frac{n}{d}=\frac{nd'}{dd'} \quad \text{et} \quad \frac{n}{d'}=\frac{nd}{dd'}.$$

Les deux fractions se rangent alors dans le même ordre que leurs numérateurs respectifs nd' et nd, donc que les nombres d' et d :

Si $d'>d$, on a : $\frac{n}{d}>\frac{n}{d'}$.

Si $d'<d$, on a : $\frac{n}{d}<\frac{n}{d'}$.

Donc, ***si deux fractions ont le même numérateur, la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur.***

EXEMPLE : $\frac{9}{5}>\frac{9}{7}$.

3. Comparaison d'une fraction au nombre 1.

1° Nous savons que, si le numérateur d'une fraction est égal à son dénominateur, cette fraction est égale à 1 (25e leçon, § 4, 2°). Si $n=d$, $\frac{n}{d}=1$.

2° Si $n\neq d$, comparer $\frac{n}{d}$ et 1 revient à comparer $\frac{n}{d}$ et $\frac{d}{d}$.

D'après le paragraphe précédent :

Si $n>d$, $\frac{n}{d}>\frac{d}{d}$ ou $\frac{n}{d}>1$.

Si $n<d$, $\frac{n}{d}<\frac{d}{d}$ ou $\frac{n}{d}<1$.

Donc :

Une fraction est égale, supérieure ou inférieure à l'unité quand son numérateur est égal, supérieur ou inférieur à son dénominateur.

EXEMPLES : $\frac{7}{7} = 1$, $\frac{9}{8} > 1$, $\frac{11}{13} < 1$.

4. Application : extraire les entiers d'une fraction supérieure à 1.

Soit la fraction $\frac{n}{d}$ (avec $n > d$, puisque la fraction est supérieure à 1).

1er cas. — n est un multiple de d.

EXEMPLE : $\frac{42}{6} = \frac{6 \times 7}{6} = \frac{1 \times 7}{1} = \frac{7}{1} = 7$.

La fraction $\frac{42}{6}$ est égale au nombre entier 7.

2e cas. — n n'est pas un multiple de d.

EXEMPLE : $\frac{29}{8}$.

Divisons le numérateur 29 par le dénominateur 8 :

$$29 = 8 \times 3 + 5 \quad \text{avec} \quad 5 < 8.$$

D'où :

$$\frac{29}{8} = \frac{8 \times 3 + 5}{8} = \frac{8 \times 3}{8} + \frac{5}{8} = 3 + \frac{5}{8}.$$

La fraction $\frac{29}{8}$ est la somme du nombre entier 3 et d'une fraction $\frac{5}{8}$ inférieure à l'unité (puisque $5 < 8$). On dit que 3 est la *partie entière* de la fraction $\frac{29}{8}$ et que l'on a *extrait les entiers* de cette fraction.

5. Problème de la soustraction.

La soustraction des nombres entiers a été définie comme l'*opération inverse* de l'addition (8e leçon) ; la *différence* $a - b$ des nombres entiers a et b, lorsqu'elle existe, est le nombre r tel que : $b + r = a$ (on sait que le problème est possible si $a \geqslant b$).

Appliquons aux fractions la ***même*** définition : ***la différence de deux fractions*** $\frac{n}{d}$ ***et*** $\frac{n'}{d'}$ ***est, si elle existe, la fraction qui, ajoutée à*** $\frac{n'}{d'}$, ***donne la fraction*** $\frac{n}{d}$.

Pour calculer la différence de deux fractions, nous effectuons une ***soustraction.***

6. Soustraction de deux fractions ayant le même dénominateur.

Soit à calculer, quand c'est possible, la différence $\frac{n}{d} - \frac{n'}{d}$, c'est-à-dire la fraction qui, ajoutée à $\frac{n'}{d}$, donne la fraction $\frac{n}{d}$.

1° $n' < n$, donc $\frac{n'}{d} < \frac{n}{d}$. — EXEMPLE : $\frac{9}{13} - \frac{5}{13}$.

La fraction $\frac{9}{13}$ peut, en décomposant 9 en une somme de deux termes dont l'un est égal à 5, s'écrire :

$$\frac{5+4}{13} \quad \text{puis} \quad \frac{5}{13} + \frac{4}{13}.$$

L'égalité : $\frac{5}{13} + \frac{4}{13} = \frac{9}{13}$ montre que $\frac{4}{13}$ est la fraction cherchée.

2° $n' > n$, donc $\frac{n'}{d} > \frac{n}{d}$. — EXEMPLE : $\frac{3}{8} - \frac{5}{8}$.

Il n'est pas possible, comme dans l'exemple précédent, de décomposer le numérateur 3 en une somme de deux nombres entiers dont 5 soit l'un des termes : la ***soustraction proposée est donc impossible.***

D'où la règle :

Pour pouvoir retrancher d'une fraction une autre fraction ayant le même dénominateur, il faut que la seconde fraction soit inférieure ou égale à la première.

La différence de deux fractions ayant le même dénominateur est la fraction qui a pour numérateur la différence des numérateurs et pour dénominateur le dénominateur commun :

$$\boxed{\frac{n}{d} - \frac{n'}{d} = \frac{n-n'}{d}} \qquad (n' \leqslant n).$$

Si $n' = n$, les deux fractions sont égales et leur différence est nulle.

7. Différence de deux fractions n'ayant pas le même dénominateur.

Après avoir, s'il y a lieu, simplifié les fractions à soustraire, on réduit ces fractions au même dénominateur.

EXEMPLE I : $\frac{28}{64} - \frac{15}{72} = \frac{7}{16} - \frac{5}{24}$.

Réduisons ces fractions au même dénominateur 48 :

$$\frac{7}{16} - \frac{5}{24} = \frac{21}{48} - \frac{10}{48} = \frac{11}{48}.$$

EXEMPLE 2 : $\frac{24}{36} - \frac{21}{28} = \frac{2}{3} - \frac{3}{4}$.

Réduisons ces fractions au même dénominateur 12 :

$\frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{8}{12} - \frac{9}{12}$. La soustraction est *impossible.*

EXEMPLE 3 (cas particulier : l'un des termes de la différence est un nombre entier) :

$$7 - \frac{8}{15} = \frac{105}{15} - \frac{8}{15} = \frac{97}{15}.$$

REMARQUE. — Puisqu'une soustraction de fractions se ramène à une soustraction de *nombres entiers*, nous pouvons généraliser la propriété de la différence des nombres entiers (8e leçon, § 4).

EXERCICES

594. Comparer les fractions :

$\frac{9}{5}$ et $\frac{17}{10}$, $\frac{13}{15}$ et $\frac{10}{11}$, $\frac{14}{27}$ et $\frac{15}{31}$.

Ranger par ordre de grandeur croissante les fractions et les nombres entiers :

595. $\frac{7}{3}$, $\frac{4}{5}$ et $\frac{24}{36}$. 4, $\frac{81}{20}$ et $\frac{14}{3}$. $\frac{5}{6}$, 1 et $\frac{7}{8}$.

596. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$. $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{17}{35}$ et $\frac{4}{7}$. 3, $\frac{25}{8}$, $\frac{10}{3}$ et $\frac{11}{4}$.

597. Mettre chacune des fractions suivantes sous la forme d'une somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1 :

$\frac{8}{3}$ $\frac{9}{7}$ $\frac{24}{11}$ $\frac{143}{12}$ $\frac{239}{13}$.

598. Montrer que la somme des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ est supérieure à $\frac{3}{4}$ (sans effectuer cette somme).

Calculer :

599. $\frac{7}{3} - \frac{2}{3}$ $\frac{15}{7} - \frac{8}{7}$ $\frac{75}{30} - \frac{15}{30}$ $\frac{45}{36} - \frac{15}{36}$.

600. $\frac{27}{42} - \frac{2}{15}$ $\frac{8}{7} - \frac{9}{8}$ $\frac{15}{16} - \frac{14}{15}$ $\frac{1}{10} - \frac{1}{100}$.

601. $3 - \frac{1}{3}$ $15 - \frac{2}{5}$ $4 - \frac{12}{7}$ $36 - \frac{3}{18}$.

602. $\frac{a}{2} - \frac{a}{3}$ $\frac{8a}{14} - \frac{5a}{21}$ $a - \frac{a}{2}$ $a - \frac{2a}{3}$.

603. $\frac{8x}{5} - \frac{2x}{7}$ $\frac{7x}{8} - \frac{5x}{16}$ $\frac{8x}{7} - \frac{2x}{9}$ $\frac{13x}{5} - 2x$.

Effectuer les calculs suivants :

604. $\frac{3}{7}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}$ $\qquad \frac{10}{25}-\frac{1}{5}+\frac{2}{9}$ $\qquad \frac{14}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}.$

605. $2+\frac{5}{3}-\frac{2}{14}$ $\qquad \frac{4}{7}+5-\frac{1}{5}$ $\qquad \frac{13}{7}-\frac{2}{3}+4.$

606. $\frac{2x}{15}+\frac{9x}{25}-\frac{2x}{20}$ $\qquad \frac{7x}{8}-\frac{4x}{18}+\frac{x}{2}$ $\qquad 9x-\frac{3x}{4}+\frac{x}{5}.$

607. On ajoute 1 à chaque terme de la fraction $\frac{5}{8}$. La fraction obtenue est-elle égale, supérieure ou inférieure à $\frac{5}{8}$?

608. Même problème pour la fraction $\frac{9}{7}$.

609. On ajoute un nombre entier n aux deux termes de la fraction $\frac{5}{6}$.

1° Calculer les différences $1-\frac{5}{6}$ et $1-\frac{5+n}{6+n}$.

2° Quelle valeur faut-il donner à n pour que la différence $1-\frac{5+n}{6+n}$ soit égale à $\frac{1}{10\,000}$?

3° Quand n augmente indéfiniment, de quel nombre se rapproche la fraction $\frac{5+n}{6+n}$?

610. Trouver une fraction ayant 15 pour dénominateur et telle que si on l'augmente de $\frac{2}{9}$, elle soit inférieure de $\frac{11}{45}$ à l'unité.

611. Trouver deux fractions ayant 11 pour dénominateur commun et telles que leurs numérateurs soient des nombres consécutifs, ces deux fractions « encadrant » la fraction $\frac{1}{3}$ $\left(\text{l'une est plus petite que } \frac{1}{3} \text{ et l'autre plus grande que } \frac{1}{3}\right)$.

612. Calculer la différence $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, puis, en remarquant que $42 = 6 \times 7$ (produit de deux nombres consécutifs), calculer le nombre n tel que :

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{42}.$$

613. Ayant calculé, comme dans le précédent exercice, la différence $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, appliquer le résultat au calcul de la somme des fractions :

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}\dots+\frac{1}{9\times 10}.$$

Calculer enfin :

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}\dots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

32. OPÉRATIONS SUR LES SOMMES, DIFFÉRENCES ET PRODUITS DE NOMBRES ENTIERS OU FRACTIONNAIRES

En étudiant les opérations sur les fractions, nous avons montré que les *propriétés* des sommes, des différences et des produits des *nombres entiers* s'appliquaient aux cas où ces expressions contenaient des *nombres fractionnaires*.

Dans ce qui suit, nous allons d'abord montrer, sur un exemple, comment peut être établie une *règle de calcul* relative à une opération à effectuer sur ces expressions. Nous nous bornerons ensuite à formuler les autres règles que l'on établirait d'une manière analogue.

I. Justification de la règle de soustraction d'une somme de nombres fractionnaires.

1° Les fractions ont le même dénominateur.

$$\frac{a}{d}-\left(\frac{b}{d}+\frac{c}{d}\right)$$

Calculons d'abord la somme écrite dans la parenthèse, puis retranchons-la de la première fraction :

$$\frac{a}{d}-\frac{b+c}{d}=\frac{a-(b+c)}{d}.$$

Appliquons au numérateur la règle de soustraction d'une somme de nombres entiers (8[e] leçon), le résultat est :

$$\frac{a-b-c}{d},$$

ce qui peut être écrit :

$$\frac{a}{d}-\frac{b}{d}-\frac{c}{d}.$$

Nous avons ainsi établi la règle :

$$\mathbf{\frac{a}{d}-\left(\frac{b}{d}+\frac{c}{d}\right)=\frac{a}{d}-\frac{b}{d}-\frac{c}{d}}.$$

EXEMPLE : $\frac{10}{3}-\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\right)=\frac{10}{3}-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}.$

2° Les fractions n'ont pas le même dénominateur.

$$\frac{a}{d}-\left(\frac{b}{d'}+\frac{c}{d''}\right)$$

Réduisons ces fractions au même dénominateur :

$$\frac{ad'd''}{dd'd''}-\left(\frac{bdd''}{dd'd''}+\frac{cdd'}{dd'd''}\right)$$

Calculons la somme écrite dans la parenthèse, puis retranchons-la de la première fraction. Nous obtenons successivement :

$$\frac{ad'd''}{dd'd''} - \frac{bdd'' + cdd'}{dd'd''}$$

$$\frac{ad'd'' - (bdd'' + cdd')}{dd'd''}$$

$$\frac{ad'd'' - bdd'' - cdd'}{dd'd''}$$

Cette dernière fraction peut s'écrire : $\frac{ad'd''}{dd'd''} - \frac{bdd''}{dd'd''} - \frac{cdd'}{dd'd''}$,

ou, après simplification : $\frac{a}{d} - \frac{b}{d'} - \frac{c}{d''}$.

Nous avons donc établi la règle :

$$\frac{a}{d} - \left(\frac{b}{d'} + \frac{c}{d''}\right) = \frac{a}{d} - \frac{b}{d'} - \frac{c}{d''}$$

EXEMPLE : $\frac{27}{5} - \left(\frac{2}{7} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{27}{5} - \frac{2}{7} - \frac{3}{4} - \frac{1}{8}$.

$$= \frac{1512}{280} - \frac{80}{280} - \frac{210}{280} - \frac{35}{280} = \frac{1187}{280}.$$

2. Addition d'une différence.

$$\frac{a}{d} + \left(\frac{b}{d'} - \frac{c}{d''}\right) = \frac{a}{d} + \frac{b}{d'} - \frac{c}{d''}.$$

EXEMPLE : $\frac{9}{10} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{10} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4}$.

$$= \frac{54}{60} + \frac{40}{60} - \frac{15}{60} = \frac{79}{60}.$$

3. Soustraction d'une différence.

$$\frac{a}{d} - \left(\frac{b}{d'} - \frac{c}{d''}\right) = \frac{a}{d} - \frac{b}{d'} + \frac{c}{d''}.$$

EXEMPLE : $\frac{7}{8} - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{7}\right) = \frac{7}{8} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7}$.

$$= \frac{147}{168} - \frac{56}{168} + \frac{48}{168} = \frac{139}{168}.$$

4. Multiplication d'une somme, d'une différence, par un nombre entier ou fractionnaire.

$$\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d'} + \frac{c}{d''}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a \times e}{d \times f} + \frac{b \times e}{d' \times f} + \frac{c \times e}{d'' \times f}.$$

$$\left(\frac{a}{d} - \frac{b}{d'}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a \times e}{d \times f} - \frac{b \times e}{d' \times f}.$$

EXEMPLE : $\left(\frac{3}{7} - \frac{1}{5}\right) \times \frac{4}{3} = \frac{3 \times 4}{7 \times 3} - \frac{1 \times 4}{5 \times 3} = \frac{4}{7} - \frac{4}{15}$.

$$= \frac{60}{105} - \frac{28}{105} = \frac{32}{105}.$$

5. Remarque.

La généralisation des règles relatives aux polynômes arithmétiques conduirait, comme ci-dessus, à d'autres règles telles que, par exemple :

$$\frac{a}{d} - \left(\frac{b}{d'} - \frac{c}{d''} + \frac{e}{d'''}\right) = \frac{a}{d} - \frac{b}{d'} + \frac{c}{d''} - \frac{e}{d'''}.$$

$$\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d'} - \frac{c}{d''}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a \times e}{d \times f} + \frac{b \times e}{d' \times f} - \frac{c \times e}{d'' \times f}.$$

EXERCICES

Calculer de deux manières différentes :

614. $\frac{9}{5} - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right)$ $\qquad \frac{10}{3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$ $\qquad 7 - \left(3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$.

615. $\frac{3}{7} + \left(\frac{12}{7} - \frac{2}{7}\right)$ $\qquad \frac{13}{5} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right)$ $\qquad \frac{11}{4} + \left(\frac{7}{2} - 2 + \frac{1}{10}\right)$.

616. $\frac{10}{5} - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\right)$ $\qquad \frac{28}{30} - \left(\frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{2}{11}\right)$ $\qquad 12 - \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{100} - \frac{1}{1\,000}\right)$.

617. $\left(10 + \frac{5}{4}\right) - \left(5 + \frac{1}{4}\right)$ $\qquad \left(3 - \frac{1}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{10}\right)$ $\qquad \left(\frac{7}{3} - 2\right) + \left(1 + \frac{1}{5}\right)$.

618. $\frac{5a}{4} + \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3}\right)$ $\qquad \frac{10a}{9} - \left(\frac{3a}{10} - \frac{a}{5}\right)$ $\qquad a - \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3} + \frac{a}{4}\right)$.

Effectuer :

619. $\left(3 + \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{4}$ $\qquad \left(12 - \frac{1}{10}\right) \times \frac{3}{4}$ $\qquad \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{3}\right) \times \frac{2}{5}$.

620. $\left(3 - \frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{3}{4} + 2\right)$ $\qquad \left(1 - \frac{1}{10}\right) \times \left(2 - \frac{2}{5}\right)$ $\qquad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{5}$.

621. $\left(\frac{a}{3} - \frac{a}{4}\right) \times \frac{5a}{2}$ $\qquad \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{3}\right) \times \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3}\right)$ $\qquad \left(a - \frac{a}{2} - \frac{a}{3}\right) \times \left(a + \frac{a}{2}\right)$.

622. $\frac{7a - 5}{12} \times 3$ $\qquad \frac{5x - 3y + 2}{7} \times 14$ $\qquad \frac{8x - 2y + 1}{5} \times \frac{1}{2}$.

623. $\frac{7(a - 5)}{12} \times 3$ $\qquad \frac{5x - (3y + 2)}{7} \times 14$ $\qquad \frac{8x - (2y + 1)}{5} \times \frac{1}{2}$.

33. FRACTIONS DÉCIMALES. NOMBRES DÉCIMAUX

1. Fraction décimale.

Une fraction est décimale quand son dénominateur est 10 ou une puissance de 10.

EXEMPLES : $\frac{9}{10}$ $\frac{115}{100}$ $\frac{27}{1\,000}$.

Une fraction qui n'est pas décimale est une ***fraction ordinaire.***

2. Unités décimales.

Les fractions décimales dont le numérateur est 1 sont appelées ***unités décimales.***

EXEMPLES :

$\frac{1}{10}$ (unité du premier ordre décimal ou *dixième*)

$\frac{1}{100}$ (unité du deuxième ordre décimal ou *centième*).

Pour classer les unités décimales dans l'ordre décroissant de leurs valeurs, on les range dans l'ordre croissant des valeurs de leurs dénominateurs (31e leçon, § 2, 3e cas). Par exemple :

$$\frac{1}{10} > \frac{1}{100} > \frac{1}{1\,000} > \frac{1}{10\,000} \cdots$$

1° Comparons l'unité décimale du premier ordre, ou $\frac{1}{10}$, au nombre 1 :

$$1 = \frac{10}{10} = \frac{1}{10} \times 10.$$

Le nombre entier 1 vaut donc 10 unités décimales du premier ordre.

2° Comparons l'unité décimale du deuxième ordre, ou $\frac{1}{100}$, à l'unité décimale du premier ordre :

$$\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = \frac{1}{100} \times 10.$$

L'unité du premier ordre décimal vaut donc 10 unités du second ordre décimal.

3° ***D'une manière générale,*** 1 unité décimale vaut 10 unités de l'ordre immédiatement inférieur.

Ainsi, les unités décimales prolongent la suite des unités entières :

...	*Unités simples*	*Dixièmes*	*Centièmes*	*Millièmes*	*Dix-millièmes.*	....
...	1er ordre	1er ordre décimal	2e ordre décimal	3e ordre décimal	4e ordre décimal	....

3. Nombre décimal.

Considérons une fraction décimale, par exemple $\frac{325}{100}$:

$$\frac{325}{100} = \frac{300 + 20 + 5}{100} = \frac{300}{100} + \frac{20}{100} + \frac{5}{100}$$

ou

$$\frac{325}{100} = 3 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}.$$

La fraction $\frac{325}{100}$ est ainsi égale à la somme d'*un nombre entier* (3) et de deux *fractions décimales* dont les numérateurs sont des nombres de un chiffre. Cette fraction peut alors s'écrire :

$$\frac{325}{100} = 3 + \frac{1}{10} \times 2 + \frac{1}{100} \times 5$$

ou

$$\frac{325}{100} = 3 \text{ unités} + 2 \text{ dixièmes} + 5 \text{ centièmes.}$$

Si l'on applique la convention faite pour l'écriture des nombres entiers (1e leçon) et si, en outre, on sépare par une virgule les unités décimales du 1er ordre des unités entières, cette fraction s'écrit :

$$\frac{325}{100} = 3{,}25.$$

Le nombre 3,25 est un ***nombre décimal.*** La partie du nombre décimal écrite à gauche de la virgule est sa ***partie entière***, celle qui est écrite à droite est sa ***partie décimale.*** Les chiffres de la partie décimale sont des ***chiffres décimaux.***

Pour lire un nombre décimal, on lit d'abord sa partie entière, que l'on fait suivre du mot « unité », puis sa partie décimale, que l'on fait suivre du nom de la *dernière unité décimale.*

EXEMPLE : 3,25 se lit 3 unités 25 centièmes.

Pour écrire un nombre décimal, on écrit d'abord sa partie entière, puis la virgule, enfin la partie décimale. De chaque côté de la virgule et à partir d'elle, on écrit les chiffres par tranches de trois chiffres séparés par des intervalles.

EXEMPLES : 4,705 2 4 275,367 9.

4. Écriture d'une fraction décimale sous forme de nombre décimal.

L'exemple précédent conduit à énoncer la règle :

Pour écrire une fraction décimale sous forme de nombre décimal, on écrit son numérateur en séparant sur sa droite, par une virgule, autant de chiffres décimaux qu'il y a de zéros au dénominateur de la fraction (si nécessaire, on ajoute des zéros à la gauche du numérateur de la fraction).

EXEMPLES :

$$\frac{6\,543}{1\,000} = 6{,}543 \qquad \frac{25}{1\,000} = 0{,}025$$

$$\frac{7\,009}{100} = 70{,}09 \qquad \frac{4}{100\,000} = 0{,}000\,04.$$

5. Écriture d'un nombre décimal sous la forme d'une fraction décimale.

Soit le nombre décimal 12,64. Exprimons-le, par exemple, en centièmes. Le nombre 1 264 centièmes s'écrit $\frac{1\,264}{100}$. D'où la règle :

Pour écrire un nombre décimal sous forme de fraction décimale, on supprime la virgule et l'on écrit au numérateur le nombre entier ainsi obtenu. On écrit au dénominateur le chiffre 1 suivi d'autant de zéros qu'il y avait de chiffres décimaux au nombre décimal donné.

EXEMPLES :

$$2{,}5 = \frac{25}{10} \qquad 0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \text{ (après simplification)}$$

$$0{,}000\,367 = \frac{367}{1\,000\,000} \qquad 0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \text{ (après simplification).}$$

REMARQUE. — On ne change pas la valeur d'un nombre décimal en écrivant un ou plusieurs zéros à droite de sa partie décimale.

Par exemple : $23{,}45 = 23{,}450 = 23{,}450\,00$

parce que : $\frac{2\,345}{100} = \frac{23\,450}{1\,000} = \frac{2\,345\,000}{100\,000}.$

6. Écriture normalisée des symboles.

Les symboles d'unités s'écrivent ***après les nombres*** et non après la virgule.

EXEMPLES : 16,7 *cm* 436,50 F.

EXERCICES

624. Écrire et lire chacun des nombres formés comme suit :

4 centaines 8 unités 5 millièmes | 9 mille 7 unités 3 dixièmes
3 dizaines 7 centièmes | 7 unités 4 centièmes 9 dix-millièmes.

625. Mettre sous forme de nombres décimaux :

$$\frac{43}{100} \qquad \frac{2\,547}{1\,000} \qquad \frac{59}{10\,000} \qquad \frac{85}{100} \qquad \frac{3}{100\,000}.$$

626. Mettre sous forme de fraction décimale et simplifier si possible :

4,26   3,291   0,455   3,25   0,05
87,5   201,03   0,85   13,2   25,5.

627. Ranger par ordre de grandeur croissante :

5,43   5,043   5,432   5,437   5,004 3.

628. Combien peut-on écrire de nombres x à 3 décimales tels que :

$$8{,}25 < x < 8{,}26 \ ?$$

629. On intercale un zéro entre la virgule et le chiffre 5 du nombre 8,57. De combien le nombre diminue-t-il?

630. Au lieu d'écrire le nombre décimal 70 unités 3 centièmes, on écrit, par erreur, 70,3. Ce nombre est-il plus grand ou plus petit que l'autre, et de combien?

34. OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES DÉCIMAUX

1. Addition de nombres décimaux.

EXEMPLE. — Calculer la somme :

$$S = 3{,}4 + 12{,}56 + 0{,}089.$$

Écrivons les termes sous forme de fractions décimales, puis réduisons celles-ci au même dénominateur et additionnons-les :

Addition des millièmes :		*Disposition pratique :*
3 400	$S = \frac{34}{10} + \frac{1\,256}{100} + \frac{89}{1\,000}$	3,4
12 560	$S = \frac{3\,400}{1\,000} + \frac{12\,560}{1\,000} + \frac{89}{1\,000}$	12,56
89	$S = \frac{3\,400 + 12\,560 + 89}{1\,000} = \frac{16\,049}{1\,000}$	0,089
16 049		16,049
	$S = 16{,}049.$	

L'addition représentée ci-dessus, *à gauche*, permet de calculer la somme des numérateurs des fractions décimales. Pour obtenir la somme des nombres décimaux, on divise ensuite la somme des numérateurs par 1 000.

Dans la disposition pratique, indiquée *à droite*, on écrit dans les mêmes colonnes les virgules et les unités de même ordre ; le calcul est plus rapide.

2. Soustraction des nombres décimaux.

EXEMPLE. — Calculer la différence :

$$D = 24{,}06 - 3{,}764.$$

En raisonnant comme ci-dessus :

Soustraction des millièmes :		*Disposition pratique :*
24 060	$D = \frac{2\,406}{100} - \frac{3\,764}{1\,000}$	24,06
3 764	$D = \frac{24\,060}{1\,000} - \frac{3\,764}{1\,000}$	3,764
20 296	$D = \frac{24\,060 - 3\,764}{1\,000} = \frac{20\,296}{1\,000}$	20,296
	$D = 20{,}296$	

3. Multiplication des nombres décimaux.

EXEMPLE. — Calculer le produit :

$$P = 14{,}56 \times 0{,}258.$$

```
  14,56
   0,258
 -------
  11 648
  72 80
 2 91 2
 -------
 3,75 648
```

Écrivons les facteurs sous forme de fractions décimales, puis multiplions ces fractions entre elles :

$$P = \frac{1\,456}{100} \times \frac{258}{1\,000}$$

$$P = \frac{1\,456 \times 258}{100\,000} = \frac{375\,648}{100\,000}.$$

$$\mathbf{P = 3{,}756\,48.}$$

Pour obtenir le produit P, on calcule donc le *produit des nombres entiers* 1 456 × 258 et l'on sépare sur sa droite 2 + 3 = 5 chiffres décimaux, c'est-à-dire autant de chiffres décimaux qu'*il y en a en tout dans les deux facteurs du produit.*

Cas particuliers.

1° Multiplication par 10, 100, 1 000...

EXEMPLE : $4{,}753 \times 100 = \frac{4\,753 \times 100}{1\,000} = \frac{4\,753}{10} = \mathbf{475{,}3}.$

Pour multiplier un nombre décimal par 10, 100, 1 000..., il suffit de déplacer sa virgule de 1, 2, 3... rangs vers la droite.

2° Multiplication par 0,1 ; 0,01 ; 0,001...

EXEMPLE : $875{,}6 \times 0{,}001 = \frac{8\,756}{10} \times \frac{1}{1\,000} = \frac{8\,756}{10\,000} = \mathbf{0{,}875\,6}.$

Pour multiplier un nombre décimal par 0,1 ; 0,01 ; 0,001..., il suffit de déplacer sa virgule de 1, 2, 3... rangs vers la gauche.

Si le multiplicande est un nombre entier, on sépare par une virgule, 1, 2, 3... chiffres sur sa droite :

$$3\,470 \times 0{,}01 = 3\,470 \times \frac{1}{100} = \frac{3\,470}{100} = \mathbf{34{,}70}.$$

REMARQUE. — Les ***puissances des nombres décimaux*** sont définies de la même manière que celles des fractions (28e leçon) ; on les calcule donc en appliquant la règle de la multiplication des nombres décimaux.

Par exemple, le carré de 0,15 est : $0{,}15^2 = 0{,}15 \times 0{,}15 = \mathbf{0{,}022\,5}$,
le cube de 0,04 est : $0{,}04^3 = 0{,}04 \times 0{,}04 \times 0{,}04 = \mathbf{0{,}000\,064}$.

4. Division des nombres décimaux.

EXEMPLE 1. — *Calculer le quotient exact de 13,4 par 0,077.*

Écrivons le dividende et le diviseur sous forme de fractions décimales, puis divisons la première fraction par la seconde. Le quotient exact est :

$$\frac{134}{10} : \frac{77}{1\,000}$$

soit :

$$\frac{134}{10} \times \frac{1\,000}{77} = \frac{134 \times 1\,000}{10 \times 77}$$

ou : $\frac{\mathbf{13\,400}}{\mathbf{77}}$ (fraction ordinaire, non égale à un nombre décimal).

EXEMPLE 2. — *Calculer le quotient exact de 1,0425 par 4,17.*

Opérons comme ci-dessus :

$$\frac{10\,425}{10\,000} : \frac{417}{100} = \frac{10\,425}{10\,000} \times \frac{100}{417} = \frac{10\,425}{41\,700}.$$

Après simplification :

$$\frac{10\,425}{41\,700} = \frac{25}{100} = \mathbf{0{,}25} \text{ (nombre décimal).}$$

Le quotient exact de deux nombres décimaux peut donc être un nombre décimal (2e exemple) ; mais, en général, il ne l'est pas et il est alors égal à une fraction ordinaire (1er exemple).

Cas particuliers.

1° Division par 10, 100, 1 000...

EXEMPLE : $413{,}25 : 1\,000 = \frac{41\,325}{100} \times \frac{1}{1\,000} = \frac{41\,325}{100\,000} = \mathbf{0{,}413\,25}.$

Pour diviser un nombre décimal par 10, 100, 1 000..., il suffit de déplacer sa virgule de 1, 2, 3... rangs vers la gauche.

Si le dividende est un nombre entier, on sépare, par une virgule, 1, 2, 3... chiffres sur sa droite :

$$455 : 1\,000 = 0{,}455.$$

2° Division par 0,1 ; 0,01 ; 0,001...

EXEMPLE : $3{,}152 : 0{,}01 = \frac{3\,152}{1\,000} : \frac{1}{100} = \frac{3\,152}{1\,000} \times \frac{100}{1} = \frac{3\,152}{10} = \mathbf{315{,}2}.$

Pour diviser un nombre décimal par 0,1 ; 0,01 ; 0,001..., il suffit de déplacer sa virgule de 1, 2, 3... rangs vers la droite.

On applique une règle analogue si le dividende est un nombre entier :

$$302 : 0{,}001 = 302\,000.$$

5. Remarque.

L'étude qui précède montre que les opérations sur les nombres décimaux se ramènent à des opérations sur des fractions et sur des nombres entiers. Il en résulte que ces opérations jouissent des mêmes propriétés, quels que soient les nombres, entiers, fractionnaires et décimaux, qui y figurent.

EXERCICES

Calculer :

631. $3,05 + 17,2 + 403,355$ $\qquad$ $3,9 + 0,03 + 4,077 + 14,22$.

632. $204,05 - 37,25$ $\qquad$ $87 - 0,003$ $\qquad$ $75,2 + 2,32 - 1,215$.

633. $39,2 \times 0,17$ $\qquad$ $99,9 \times 0,75$ $\qquad$ $812,03 \times 54,09$.

634. En transformant les nombres décimaux en fractions, calculer :

$$\frac{1}{7} + 2,3 + 0,25 \qquad \frac{3}{11} - 0,007 \qquad \frac{17}{9} - 1,5 + 3,42.$$

635. Le complément à l'unité d'un nombre décimal inférieur à 1 étant la différence entre 1 et ce nombre, calculer les compléments à l'unité de :

0,99 $\qquad$ 0,999 $\qquad$ 0,895 $\qquad$ 0,905 $\qquad$ 0,874.

Calculer :

636. $6,5^2$ $\qquad$ $0,47^2$ $\qquad$ $12,25^2$.

637. $0,43^3$ $\qquad$ $1,01^3$ $\qquad$ $74,2^3$.

638. $3,14 \times 2,25^2$ $\qquad$ $1,05 \times 0,37^3$ $\qquad$ $2,27 \times 10,5^3$.

639. $7 \times 12,25^2 \times 9,2$ $\qquad$ $5 \times 0,39^3 \times 2$ $\qquad$ $4 \times 2,36^3 \times 2,5$.

Écrire sous la forme d'une fraction irréductible les quotients :

640. 36,3 : 1,27 $\qquad$ 340,5 : 0,093 $\qquad$ 2 365,5 : 94,5.

641. 4 300 : 0,595 $\qquad$ 144,12 : 84 $\qquad$ 6 024,48 : 0,36.

642. Un nombre décimal a deux chiffres décimaux, le dernier à droite étant différent de zéro. Quel est le nombre de chiffres décimaux de son carré? de son cube?

35. QUOTIENT DE DEUX NOMBRES A UNE UNITÉ DÉCIMALE PRÈS

Ainsi que nous l'avons vu dans la précédente leçon, le quotient exact de deux nombres entiers, fractionnaires ou décimaux, a et b, est généralement une fraction ordinaire, plus rarement une fraction décimale ou un nombre entier.

EXEMPLES. — Le quotient exact de 35 par 5 est l'*entier* 7 (12ᵉ leçon).

Le quotient exact de 29 par 3 est la *fraction* $\frac{29}{3}$ (29ᵉ leçon).

Le quotient exact de 13,4 par 0,077 est la *fraction* $\frac{13\,400}{77}$ (34ᵉ leçon).

Le quotient exact de 1,042 5 par 4,17 est la fraction $\frac{25}{100}$, qui est égale au *nombre décimal* 0,25 (34ᵉ leçon).

I. Quotients à une unité près.

Le quotient à une unité près par défaut des nombres a et b est le nombre entier immédiatement inférieur à leur quotient exact.

Ainsi, le quotient à 1 unité près par défaut de 29 par 3 est le plus grand nombre entier inférieur à $\frac{29}{3}$, c'est-à-dire 9.

Le quotient à une unité près par excès des nombres a et b est le nombre entier immédiatement supérieur à leur quotient exact.

Ainsi, le quotient à 1 unité près par excès de 29 par 3 est le nombre entier immédiatement supérieur à $\frac{29}{3}$, c'est-à-dire 10.

Plus généralement, q étant le quotient à 1 unité près *par défaut* de a par b et $q + 1$ le quotient à 1 unité près *par excès* de a par b, nous pouvons écrire la relation :

$$b \times q < a < b \times (q + 1).$$

Calculer les quotients à 1 unité près, par défaut et par excès, de deux nombres se ramène donc à chercher *les deux nombres entiers consécutifs qui « encadrent » leur quotient exact*, ce qui revient à dire que l'on « *insère* » le quotient exact entre deux nombres entiers consécutifs.

Dans l'exemple précédent :

$$9 < \frac{29}{3} < 10.$$

REMARQUE. — Pour simplifier le langage, on convient de dire que 9 est le ***quotient à une unité près*** de 29 par 3.

2. Quotients à une unité décimale près.

Soit à chercher le *quotient à un dixième près* de 29 par 3. Insérons le quotient exact $\frac{29}{3}$ entre deux nombres consécutifs de dixièmes :

$$\frac{96}{10} < \frac{29}{3} < \frac{97}{10} \quad \text{ou} \quad 9{,}6 < \frac{29}{3} < 9{,}7.$$

On dit que 9,6 et 9,7 sont respectivement les *quotients à un dixième près*, par défaut et par excès, de 29 par 3.

Plus généralement :

Le quotient à 1/10, 1/100, 1/1 000... près, par défaut, de deux nombres, entiers ou décimaux, est la plus grande fraction de dénominateur 10, 100, 1 000... inférieure ou égale à leur quotient exact.

L'égalité peut se produire dans certains cas ; par exemple, la division à 1/100 près par défaut, de 21,35 par 5 donne un quotient égal à 4,27 et un *reste nul* : elle se fait donc exactement.

On définirait aisément le quotient à une unité décimale près par excès.
Ces quotients peuvent donc s'écrire sous forme de *nombres décimaux*.

3. Calcul des quotients à une unité décimale près de deux nombres.

1er cas. — Le diviseur est entier.

EXEMPLE. — *Calculons le quotient, à $\frac{1}{100}$ près, de 92,754 par 6.*

Désignons par la fraction décimale $\frac{q}{100}$ le quotient cherché. Par définition :

$$\frac{q}{100} \leqslant \frac{92{,}754}{6} < \frac{q+1}{100}.$$

Cette relation s'écrit encore :

$$\frac{6 \times q}{100} \leqslant 92{,}754 < \frac{6 \times (q+1)}{100}$$

$$6 \times q \leqslant 92{,}754 \times 100 < 6 \times (q+1)$$

$$6 \times q \leqslant 9\,275{,}4 < 6 \times (q+1)$$

Or, le nombre $6 \times q$, qui est un nombre entier, est au plus égal à 9 275 et $6 \times (q+1)$, étant plus grand que 9 275,4, est supérieur à 9 275. Donc :

$$6 \times q < 9\,275 < 6 \times (q+1),$$

ce qui prouve que le nombre q est le quotient à 1 unité près de 9 275 par 6, c'est-à-dire 1 545.

Le quotient de 92,754 par 6 est ainsi la fraction décimale $\frac{1\,545}{100}$ ou encore le *nombre décimal 15,45*.

D'où la règle :

```
92,754 | 6
32     |------
 2 7   | 15,45
  35   |
   5   |
```

Pour calculer le quotient à 1/10, 1/100, 1/1000... près d'un nombre, entier ou décimal, par un diviseur entier :

1° on multiplie le nombre par 10, 100, 1 000... ;

2° on cherche le quotient à une unité près de la partie entière de ce produit par le diviseur;

3° on sépare sur la droite du quotient 1, 2, 3... chiffres décimaux.

Pratiquement, on adopte la disposition pratique indiquée ici : au lieu de multiplier le dividende par 100, puis de séparer deux chiffres sur la droite du quotient, on divise la partie entière du dividende par le diviseur, puis on place la virgule à la droite du quotient obtenu et l'on arrête la division quand on a obtenu les deux chiffres décimaux.

2e cas. — Le diviseur est décimal.

EXEMPLE. — *Calculons le quotient, à $\frac{1}{100}$ près, de 56,435 par 7,9.*

Désignons le quotient cherché par la fraction décimale $\frac{q}{100}$.

Comme dans le 1er cas :

$$\frac{q}{100} \leqslant \frac{56,435}{7,9} < \frac{q+1}{100},$$

ce qui s'écrit encore :

$$\frac{7,9 \times q}{100} \leqslant 56,435 < \frac{7,9 \times (q+1)}{100}.$$

Multiplions par 10 les membres de ces inégalités :

$$79 \times \frac{q}{100} \leqslant 564,35 < 79 \times \frac{(q+1)}{100}.$$

Nous sommes ramenés à chercher le quotient à $\frac{1}{100}$ près du nombre 564,35 par le nombre entier 79 (premier cas). Nous trouvons 7,14.

```
56,435 | 7,9          564,35 | 79
       |-----          11 3  |------
       |                3 45 | 7,14
       |                  29 |
```

On applique donc la règle énoncée plus haut, *après avoir supprimé la virgule du diviseur et déplacé vers la droite (en écrivant des zéros s'il y a lieu) celle du dividende d'autant de rangs qu'il y a de chiffres décimaux au diviseur.*

EXERCICES

Calculer les quotients approchés :

643. à 0,1 près : de 37 par 12 — de 532,253 par 1,4 — de 7,5 par 4,9.

644. à 0,01 près : de 3,65 par 1,4 — de 0,339 par 0,09 — de 285 par 1,414.

645. à 0,001 près : de 2 800 par 9 — de 405,3 par 1,72 — de 3 039 par 1,732.

646. La valeur approchée à 0,01 près par défaut d'une fraction est 0,37. Trouver son numérateur sachant que son dénominateur est 77.

647. La valeur approchée à 0,001 près par défaut d'une fraction est 0,453. Trouver son dénominateur sachant que son numérateur est 281.

648. On ignore le dividende entier d'une division dont le diviseur est 29, mais on sait que le quotient à 0,01 près par défaut est 4,31. Entre quels nombres (exprimés en centièmes) est compris le dividende? Quel est le dividende?

649. Le quotient par 11 d'un nombre est 3,35 (à 0,01 près par défaut). Entre quelles limites est compris le dividende? Le dividende peut-il être un nombre entier?

650. En divisant 215 par un nombre entier, on trouve 12,6 pour quotient approché à 0,1 près. Trouver le diviseur.

651. On divise 421 par un diviseur; le quotient entier est 131. Le diviseur ne peut pas être entier. Pourquoi?

652. Trouver deux nombres sachant que leur total est 32,9, que leur quotient a pour partie entière 5 et que le reste de leur division est 0,5.

653. En divisant le nombre 7 par un autre nombre, on trouve 0,056 pour quotient exact. Trouver cet autre nombre.

512,18	. ..
.... .	..,.4
17 78	
1 30	

654. Reconstituer la division ci-contre.

655. Le quotient à 0,000 1 près d'un nombre D par 8,4 est 4,471 4. Quel est le plus petit nombre que l'on peut prendre pour D?

36. FRACTIONS ORDINAIRES ET NOMBRES DÉCIMAUX (1)

Nous savons qu'un nombre décimal peut toujours être écrit sous la forme d'une fraction décimale puis, éventuellement après simplification, sous la forme d'une fraction ordinaire $\left(\text{Ex. : } 0{,}12 = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}\right)$.

On dit que le nombre décimal a été *converti* en fraction ordinaire.

Nous allons étudier si l'*opération inverse*, c'est-à-dire la conversion d'une fraction ordinaire en nombre décimal, est toujours possible. Sinon, nous chercherons à quelles conditions elle peut être réalisée.

I. Recherche des conditions de possibilité de conversion d'une fraction ordinaire en nombre décimal.

1° Considérons la fraction décimale $\frac{3\,675}{1\,000}$. Réduisons-la à sa plus simple expression :

$$\frac{3\,675}{1\,000} = \frac{3 \times 5^2 \times 7^2}{2^3 \times 5^3} = \frac{3 \times 7^2}{2^3 \times 5} = \frac{147}{40}.$$

La fraction $\frac{3\,675}{1\,000}$ étant égale à la fraction irréductible $\frac{147}{40}$, ses termes sont des équimultiples des termes de $\frac{147}{40}$ (26e leçon, § 5, 1°).

Par conséquent, le dénominateur 40, qui est un diviseur de 1 000, ne peut contenir d'autres facteurs premiers que ceux de 1 000, qui sont exclusivement 2 et 5 (20e leçon, § 1). En effet : $1\,000 = 10^3 = (2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$.

Donc :

Si une fraction ordinaire irréductible est convertible en fraction décimale, son dénominateur ne contient pas d'autres facteurs premiers que 2 et 5.

On peut d'ailleurs *vérifier* que, dans l'exemple donné : $40 = 2^3 \times 5$.

2° Soit une fraction irréductible dont le dénominateur ne contient pas d'autre facteur premier que 2 et 5, par exemple :

$$\frac{a}{2 \times 5^3}.$$

Si nous multiplions les deux termes de cette fraction par 2^2, nous obtenons la fraction :

$$\frac{a \times 2^2}{2 \times 2^2 \times 5^3} = \frac{a \times 2^2}{2^3 \times 5^3} = \frac{a \times 2^2}{10^3},$$

qui est décimale.

(1) Cette leçon ne peut être étudiée avant la classe de 4e.

Donc :

Si une fraction irréductible a pour dénominateur un nombre qui ne contient pas d'autres facteurs premiers que 2 et 5, cette fraction est convertible en fraction décimale.

EXEMPLES :

$\frac{7}{8}$ est convertible, car : $8 = 2^3$.

$\frac{3}{14}$ n'est pas convertible, car : $14 = 2 \times 7$.

$\frac{5}{33}$ n'est pas convertible, car : $33 = 3 \times 11$.

$\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ est convertible (ne pas oublier de rendre *irréductible* la fraction considérée).

3° On énonce souvent comme suit le ***théorème*** ainsi démontré :

Une fraction irréductible est convertible en fraction décimale si, et seulement si, son dénominateur ne contient pas d'autres facteurs premiers que 2 et 5.

2. Méthodes pratiques de conversion d'une fraction ordinaire en nombre décimal.

Plaçons-nous dans le cas d'une conversion possible.

EXEMPLE : $\frac{26}{80}$. ***1re méthode.*** — *a)* On rend la fraction *irréductible* : $\frac{26}{80} = \frac{13}{40}$.

b) On *décompose* son dénominateur en un produit de facteurs premiers :

$$\frac{13}{40} = \frac{13}{2^3 \times 5}.$$

c) On multiplie les deux termes par un nombre formé de facteurs 2 et 5, choisi de telle manière que les *exposants des facteurs qui figurent au dénominateur deviennent égaux* :

$$\frac{13}{2^3 \times 5} = \frac{13 \times 5^2}{2^3 \times 5^3} = \frac{325}{10^3} = \frac{325}{1\,000} = \mathbf{0{,}325}.$$

2e méthode. — On vient d'établir que :

$$\frac{26}{80} = \frac{13}{40} = 0{,}325,$$

ce qui exprime que 0,325 est le *quotient à 1 millième près* de 26 par 80, ou de 13 par 40 (35e leçon).

130	40
100	0,325
200	
00	

Donc, pour convertir, quand c'est possible, une fraction ordinaire en nombre décimal, on cherche les quotients à une unité décimale près de son numérateur par son dénominateur et l'on arrête l'opération quand on trouve un *reste nul*.

3. Fraction ordinaire non convertible en nombre décimal.

D'après l'étude faite dans le paragraphe 1 de cette leçon :

Toute fraction irréductible dont le dénominateur contient d'autres facteurs premiers que 2 et 5 n'est pas convertible en fraction décimale.

EXEMPLES : $\frac{4}{11}$, $\frac{5}{12}$.

Si l'on cherche, pour chacune de ces fractions, le quotient, à 1 unité décimale près, du numérateur par le dénominateur, on ne trouve donc jamais un reste nul. On ne peut donc trouver que des ***valeurs décimales approchées*** de ces fractions :



Les restes trouvés étant, pour chaque division, inférieurs au diviseur, ils sont en *nombre limité* (par exemple, dans la première des opérations ci-dessus, ces restes ne peuvent être différents de 1, 2, 3, 4, ..., 9, 10). Il en résulte que, lorsque l'on obtient un reste déjà trouvé, les restes qui suivent se reproduisent dans le même ordre. Il en est de même des chiffres du quotient : on dit que le nombre décimal obtenu est *périodique*.

En employant le signe $\approx$, qui signifie *« environ égal »*, on peut écrire :

$$\frac{4}{11} \approx 0{,}363\,636$$

(le groupe de deux chiffres qui se reproduit à partir de la virgule, 36, est la *période*) ;

$$\frac{5}{12} \approx 0{,}416\,6$$

(les chiffres 4 et 1 placés immédiatement après la virgule ne se reproduisent pas : ce sont les chiffres *irréguliers* ; le chiffre 6, qui se reproduit, est la *période*).

Le nombre 0,363 636... est un nombre décimal ***périodique simple*** ;
le nombre 0,416 6... est un nombre décimal ***périodique mixte***.

EXERCICES

656. Écrire sous la forme de nombres décimaux les fractions décimales :

$$\frac{5}{10} \quad \frac{3}{100} \quad \frac{37}{100} \quad \frac{431}{10} \quad \frac{3\,909}{1\,000} \quad \frac{400}{1\,000} \quad \frac{8\,643}{10\,000}.$$

657. Écrire sous la forme de fractions décimales les nombres décimaux :

0,3   0,29   0,364   0,0387   1,2   83,52   185,23.

658. Convertir en nombres décimaux les fractions ordinaires :

$$\frac{1}{5} \quad \frac{7}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{21}{20} \quad \frac{36}{500} \quad \frac{3}{2\,000} \quad \frac{1}{40\,000} \quad \frac{153}{625}.$$

659. Convertir en fractions décimales, que l'on réduira ensuite à leur plus simple expression, les nombres décimaux :

0,3   2,4   0,45   3,12   0,411   0,625.

660. Trouver toutes les fractions ordinaires égales au nombre décimal 0,35 et ayant pour dénominateurs des nombres compris entre 15 et 100.

Convertir en nombres décimaux les fractions ordinaires suivantes et dire la nature du nombre décimal obtenu :

661. $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{5}{11}$ $\frac{8}{14}$ $\frac{25}{23}$ $\frac{300}{51}$.

662. $\frac{1}{6}$ $\frac{6}{35}$ $\frac{1}{300}$ $\frac{8}{60}$ $\frac{50}{34}$ $\frac{100}{55}$.

663. Chercher la période des valeurs décimales approchées des fractions $\frac{1}{7}$ $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$... $\frac{6}{7}$. Que constatez-vous?

664. Pouvez-vous dire, sans faire les calculs, quel est le chiffre décimal qui occupe un rang donné dans un nombre décimal périodique? Par exemple, quel est le 100ᵉ chiffre décimal du nombre périodique égal à la fraction $\frac{1}{7}$? Quel est le 52ᵉ chiffre décimal du nombre périodique égal à la fraction $\frac{11}{14}$?

665. Dire si, en remplaçant, dans les calculs, le nombre 3,14 par la fraction $\frac{22}{7}$, on obtient, en calculant la longueur d'une circonférence dont on connaît le rayon, un nombre plus grand ou plus petit. Même question en remplaçant la fraction $\frac{22}{7}$ par $\frac{355}{113}$.

666. Trouver le numérateur d'une fraction ayant 57 pour dénominateur et dont la valeur approchée à 0,01 près par défaut est 0,47. Le problème serait-il possible si l'on donnait 0,46 au lieu de 0,47?

667. Sachant que le degré et le radian valent respectivement $\frac{1}{360}$ et $\frac{1}{2\pi}$ de la circonférence, calculer, en degrés, la valeur du radian.

668. Trouver une fraction sachant qu'en divisant par $\frac{4}{5}$ le numérateur et par $\frac{2}{3}$ le dénominateur on obtient une nouvelle fraction égale à 0,028.

PROBLÈMES SUR LE CHAPITRE III.

669. Démontrer que les fractions $\frac{a+1}{a(2a+1)}$ et $\frac{2a+1}{2a(a+1)}$ sont irréductibles, quel que soit a.

670. Démontrer que, si a n'est pas un multiple de 5, les fractions $\frac{a}{a+5}$ et $\frac{a-5}{a}$ sont irréductibles.

671. Démontrer que, si a et b sont premiers entre eux, la fraction $\frac{ab}{a+b}$ est irréductible.

672. En appliquant une formule donnant la longueur l d'un câble en acier, tendu entre deux points dont la distance mesurée sur le plan horizontal est 1 000 m, calculer l (en mètres) :

$$l = 1\,000 + \left(300 + 50 + \frac{28}{52} + 10 + 10 \times \frac{34}{140}\right) \times \frac{1}{2}.$$

673. Deux citernes à mazout, identiques, sont remplies jusqu'aux $\frac{9}{10}$ de leur capacité. On puise dans la première 63 *l* et dans la seconde 141 *l*. A ce moment, le jaugeage indique qu'il reste dans la première 3 fois plus de mazout que dans la seconde. On demande la capacité des citernes.

674. Deux tuyaux qui alimentent un bassin peuvent, en 1 *h*, remplir les $\frac{3}{8}$ de ce bassin. Le premier tuyau débite 10 *l* $\frac{1}{3}$ à la minute, le second 4 *l* $\frac{1}{3}$ de plus. Trouver la capacité du bassin.

675. Un réservoir a la forme d'un parallélépipède rectangle et sa base est horizontale. Sa hauteur intérieure est 75 *cm*. Il contient une certaine quantité d'eau.

Si on enlevait les $\frac{3}{5}$ de cette eau, le niveau de l'eau qui resterait s'élèverait aux $\frac{4}{15}$ de la hauteur du réservoir ; si, au lieu de retirer de l'eau, on en ajoutait 15,7 *l*, le niveau s'élèverait aux $\frac{5}{6}$ de la hauteur.

Trouver : 1° la hauteur à laquelle l'eau s'élève dans le réservoir ;

2° la capacité du réservoir ;

3° l'aire de la base du réservoir.

676. Un vase vide pèse 500 *g*. Rempli d'eau aux $\frac{3}{4}$ il pèse 3,650 *kg*. Rempli aux $\frac{2}{3}$ d'huile de densité 0,91 et, pour le reste, d'un autre liquide, il pèse 4,340 *kg*. Quelle est la densité de cet autre liquide ?

Exprimer la contenance du vase en litres, puis en centimètres cubes.

677. Neuf agriculteurs se groupent pour faire établir, à leurs frais, à participation égale, une voie étroite, type Decauville. L'installation complète revient à 131 400 F. Mais, après accord, il est convenu que plusieurs d'entre eux ne doivent verser que $\frac{3}{5}$ de la quote-part prévue, la différence étant alors remboursée par les autres qui paient chacun 2 920 F en plus de la quote-part primitivement fixée. On demande le nombre de ceux qui ont bénéficié du rabais.

678. Une étoffe perd au lavage le $\frac{1}{20}$ de sa longueur et le $\frac{1}{16}$ de sa largeur. Quelle longueur de cette étoffe faut-il acheter pour obtenir après lavage 85,50 m^2, la largeur primitive étant 0,80 *m* ? Sachant qu'on a payé net cette étoffe 640,20 F en bénéficiant d'un rabais de 3 %, trouver le prix d'achat du mètre.

679. Un marchand vend les $\frac{2}{5}$ d'une pièce de finette à 24 F le mètre et fait un bénéfice de 60 F. Il vend le reste à 25,60 F le mètre et fait un bénéfice de 138 F. Trouver la longueur de la pièce.

680. Un propriétaire achète un pré pour le revendre par parcelles. Il vend à une personne les $\frac{5}{8}$ du pré, à une seconde les $\frac{3}{8}$ du reste et à une troisième le nouveau reste. La seconde personne a 93 *a* de moins que la première. Toutes ces ventes sont faites à 280 F l'are. Représenter chaque parcelle par une fraction de la surface totale du pré. Calculer le gain total du propriétaire sachant qu'il réalise un bénéfice égal aux $\frac{3}{17}$ du coût d'achat du pré.

681. Un marchand vend à raison de 18 F le mètre une pièce d'étoffe qu'il a achetée à un prix inconnu. Il en vend d'abord les $\frac{3}{8}$, puis il vend les $\frac{3}{5}$ du reste et enfin la moitié du nouveau reste. Ces trois ventes ont déjà produit une somme égale au prix d'achat total de la pièce, plus 18 F de bénéfice. Dans une quatrième vente, le marchand vend le reste de la pièce, et son bénéfice total est 288 F. Calculer la longueur de la pièce et le prix d'achat du mètre.

682. Chaque année, la valeur d'une propriété s'accroît du $\frac{1}{10}$ de la valeur qu'elle avait au début de l'année. Au bout de 3 années d'exploitation, cette propriété est estimée 200 000 F. Quelle était sa valeur initiale, à 10 F près?

683. Trois frères ont acheté une propriété pour 100 000 F. Le cadet dit qu'il pourrait la payer seul, si le plus jeune lui donnait la moitié de son argent; le plus jeune dit qu'il la paierait seul, si l'aîné lui donnait le $\frac{1}{3}$ de son argent; enfin l'aîné ne demande que le $\frac{1}{4}$ de l'argent du cadet pour payer seul la propriété. Combien chacun avait-il d'argent?

684. Une barrique de vin contient 45 *l* de plus qu'une autre. Si on lui enlève les $\frac{5}{13}$ de son contenu, il lui rèste une quantité de vin égale aux $\frac{4}{5}$ de celle de la seconde. On demande la contenance de chacune.

685. Deux pompes sont utilisées pour vider un bateau-citerne. L'une pourrait effectuer le travail seule en 7 *h* 1/2, l'autre en 6 *h* 1/4. La seconde travaille seule pendant 2 *h*, puis les deux pompes fonctionnent en même temps. Combien de temps faut-il pour vider le bateau?

686. Pour alimenter deux citernes A et B, on envoie de l'essence par deux tuyaux de débits différents T et D. La citerne A peut être remplie par les deux tuyaux coulant ensemble en 40 *mn*. La citerne B est remplie en 50 *mn* par le tuyau T seul ou en 80 *mn* par le tuyau D seul. Dire en combien de temps la citerne A peut être remplie par chacun des tuyaux T et D fonctionnant seuls.

687. Un tourneur a reçu une commande de 156 pièces identiques. Pour les exécuter, il emploie les moyens ordinaires, mais n'en fait qu'une par jour. Il travaille ainsi 8 *j* 1/2, puis construit un outillage spécial qui lui a demandé 5 *j* 3/4 de travail. Mais avec cet outillage, il peut faire 7 pièces en $\frac{14}{3}$ *j* de travail. On demande :

1° la durée totale de l'exécution de la commande;

2° le gain journalier de l'ouvrier si on le paie à raison de 32 F par pièce.

688. Deux ouvriers A et B d'habileté différente ont à faire chacun une tâche identique payée 96,80 F. A, seul à son travail pendant 10 *h*, le termine ensuite avec le concours de B; ils travaillent ensemble alors 8 *h*. Enfin B travaille seul au sien pendant 9 *h* et le termine avec le concours de A en 8 *h*. Chacun étant payé finalement suivant le travail fait, le gain de B surpasse le gain de A de 6,40 F. Calculer le gain par heure de chaque ouvrier. Calculer enfin le temps que mettrait chaque ouvrier pour faire un des travaux.

689. Une balle élastique rebondit aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur d'où elle tombe. Elle tombe de 8,10 *m*. A quelle hauteur rebondira-t-elle au 3ᵉ bond? Après combien de bonds rebondira-t-elle à 1,60 *m*?

690. Sur la platine d'une machine pneumatique, une cloche renferme 9 *l* d'air. A chaque coup de piston on enlève 1,5 *l* (le volume du corps de pompe). Quelle sera la pression à l'intérieur de la cloche après 3 coups de piston? (Pression extérieure : 760 *mm*.)

CHAPITRE IV

37. NOMBRES COMPLEXES

Certaines grandeurs, telles que les arcs, les angles, les temps, sont en général mesurées au moyen d'unités qui ne suivent pas la loi décimale. Leurs valeurs s'expriment alors en ***nombres complexes***.

EXEMPLES. — Un ***angle*** de 43° 52′ 47″, un ***temps*** de 3 *h* 4 *mn* 12 *s*.

Les opérations sur ces nombres ayant été étudiées en classe de 6ᵉ, nous nous bornerons ici à rappeler, sur des exemples, leurs mécanismes :

Addition.

$$\begin{array}{rrr} ^{1} & ^{2} & \\ 24^\circ & 12' & 54'' \\ 39^\circ & 53' & 20'' \\ & 47' & 49'' \\ \hline 64^\circ & 114' & 123'' \end{array}$$

ou $\boldsymbol{64^\circ\ 54'\ 3''}$

Soustraction.

$$\begin{array}{r} ^{60} \\ 27\ h\ 10\ mn\ 15\ s \\ 12\ h\ \ 5\ mn\ 42\ s \\ \hline \mathbf{15}\ h\ \mathbf{4}\ mn\ \mathbf{33}\ s. \end{array}$$

Multiplication
par un nombre entier.

$$\begin{array}{r} 4\ h\ \ 42\ mn\ 10\ s \\ 3 \\ \hline 12\ h\ 126\ mn\ 30\ s \end{array}$$

ou ***14*** h ***6*** mn ***30*** s

Division
par un nombre entier.

$$\begin{array}{lll|l} 46^\circ & 27' & 4'' & 4 \\ \cline{4-4} 2 \times 60 = & 120' & & \mathit{11^\circ\ 36'\ 46''} \\ & 147' & & \\ & 27 & & \\ & 3 \times 60 = & 180'' & \\ & & 184'' & \\ & & 24 & \\ & & 0 & \end{array}$$

Multiplication ou division par un nombre quelconque.

Pour faire ces opérations, il est en général commode de convertir préalablement ces nombres en unités de l'***ordre le plus petit.***

$$2\ h\ 24\ mn \times 4{,}5 = 144\ mn \times 4{,}5 = 648\ mn = \mathbf{10}\ h\ \mathbf{48}\ mn.$$

$$5\ h\ 36\ mn \times \frac{3}{4} = 336\ mn \times \frac{3}{4} = 252\ mn = \mathbf{4}\ h\ \mathbf{12}\ mn.$$

$$29^\circ\ 36' : \frac{2}{3} = 1\ 776' \times \frac{3}{2} = 2\ 664' = \mathbf{44^\circ\ 24'}.$$

Pour trouver le quotient des nombres complexes 1 *h* 20 *mn* 32 *s* et 1 *h* 24 *mn*, on convertit d'abord en secondes le dividende et le diviseur ; on obtient respectivement les nombres 4 832 et 3 624. Leur division donne $4\,832 : 3\,624 = \frac{4}{3}$.

EXERCICES

691. Un voyageur manque, à Paris, le rapide de Marseille qui part à 9 *h*. Il décide de se rendre par avion à Lyon pour rejoindre le rapide. La distance de Paris à Lyon est de 512 *km* par voie ferrée et 500 *km* par avion. Le rapide marche à la vitesse de 108 *km* à l'heure et l'avion à la vitesse de 400 *km*. Si les déplacements pour aller de la gare au terrain de départ et du terrain d'atterrissage à la gare prennent 3 *h* au voyageur, de combien sera-t-il en avance sur le rapide à son arrivée à la gare de Lyon?

692. Un piéton marche pendant 110 *mn*. Il est alors rejoint par un de ses amis qui l'emmène en automobile à une vitesse qui est les $\frac{40}{3}$ de celle du piéton. La deuxième partie du trajet ayant duré 6 *mn*, on demande les vitesses respectives du piéton et de l'automobile. Le trajet total parcouru est 19 *km*.

693. Un camion fait régulièrement 48 *km* à l'heure en montée, 60 *km* à l'heure en terrain plat et 72 *km* à l'heure en descente.

1° Le camion va de la ville A à la ville B en 2 *h*.

Il est en terrain plat la moitié du temps et le temps pendant lequel il monte est le triple de celui pendant lequel il descend. Quelle est la distance de A à B?

Quel temps mettrait le camion pour revenir de B à A?

2° Ce même camion va ensuite de B en C en 1 *h* 25 *mn* par une route qui ne comprend qu'une montée et qu'une descente d'égale longueur. On demande la durée de la montée, celle de la descente et la distance de la ville B à la ville C.

694. Un cycliste parcourt une route AB qui comprend du terrain plat, des montées et des descentes. Sur le terrain plat, sa vitesse est de 24 *km* à l'heure; en montée, elle est de 16 *km* à l'heure, en descente de 30 *km* à l'heure. De A vers B, le cycliste met 5 *h*. De B vers A, il met 4 *h* 39 *mn*. Sachant que les parties horizontales de la route ont 56 *km*, on demande la longueur des montées et celle des descentes (dans le sens de A vers B).

695. Le départ d'une course cycliste est donné à 7 *h*. Dès le début de la course, un peloton roule en tête à la vitesse moyenne de 36 *km* à l'heure. Pour suivre la course, un des organisateurs part du point de départ à 8 *h* 20 *mn* en automobile et marche à la vitesse de 76 *km* à l'heure. 1° A quelle heure rejoindra-t-il le peloton qui est en tête?

2° A quelle distance du point de départ?

696. Un train omnibus part de Paris à 8 *h* 30 *mn* avec une vitesse moyenne de 42 *km* à l'heure. Un train express dont la vitesse est 68 *km* à l'heure part de Paris dans la même direction et sur la même voie à 9 *h* 20 *mn*. A quelle heure aurait lieu la rencontre, si l'on ne garait pas le train omnibus? Pour se conformer aux règlements, on doit garer le train omnibus 10 *mn* avant le passage du train express. A quelle heure et à quelle distance de Paris devra-t-on garer le train omnibus?

697. Deux cyclistes partent le même jour à 6 *h* du matin de deux points A et B, se dirigeant vers un même point C; la distance de A à B est 60 *km*, celle de B à C est 180 *km*. Celui qui part de A fait en moyenne 24 *km* à l'heure; celui qui part de B en fait 16. On demande : 1° à quelle heure les deux voyageurs se trouvent à égale distance de B, l'un en avant de B et l'autre après B, et quelle sera cette distance? 2° à quelle heure et à quelle distance de C le voyageur parti de A atteindra-t-il celui parti de B?

698. Un voyageur assis dans une gare voit passer devant lui un train qui roule à 90 *km* à l'heure. A une certaine distance de la gare, sur la voie rectiligne, se trouve un pont métallique. Le voyageur a entendu passer le train sur le pont 73 *s* après l'avoir vu passer en gare. On demande la distance de la gare au pont.

Un deuxième train vient à passer en sens inverse. Le voyageur le voit passer 80 *s* après avoir entendu son passage sur le pont. Quelle est la vitesse de ce deuxième train? (Vitesse du son : 340 *m/s*.)

699. Une automobile a franchi en 9 *s* un pont de 140 *m* de longueur.

Quelle est sa vitesse en kilomètres à l'heure? Au moment où elle débouche du pont,

une autre automobile est à 1 *km* en avant, allant dans le même sens. Les deux voitures se rejoignent à 3,500 *km* de la sortie du pont. Quelle est la vitesse de la deuxième automobile ?

A partir du moment de leur rencontre, les deux voitures vont, de conserve, à la vitesse de la deuxième. Elles arrivent à 12 *h* 15 *mn* en une ville située à 75 *km* du pont. A quelle heure la première a-t-elle franchi le pont ?

700. Un train met 20 *s* à défiler devant un poteau télégraphique et 50 *s* à traverser un tunnel de 150 *m* de long. 1° Calculer la vitesse horaire et la longueur du train en mètres.

2° Une auto circulant sur une voie parallèle et dans le même sens double le train en 10 *s*. Quelle est la vitesse de l'auto ? (On néglige sa longueur.)

701. Un cycliste part d'une ville A à 7 *h* du matin et se dirige vers une ville B à la vitesse de 20 *km* à l'heure ; 5 *h* plus tard, un automobiliste part de B vers A avec une vitesse de 45 *km* à l'heure. La distance de A à B étant de 197,5 *km*, chercher à quelle heure et à quelle distance de A se fera la rencontre.

702. Deux villes A et B distantes de 250 *km* sont reliées par une ligne de chemin de fer avec une station intermédiaire C, située à 100 *km* de A. Un train part de A à 8 *h* et fait 75 *km* à l'heure. Arrivé en C, il s'arrête 10 *mn* et repart vers B avec une vitesse de 60 *km* à l'heure. Un autre train part de B à 8 *h* 30 *mn* avec une vitesse de 90 *km* à l'heure, s'arrête en C pendant 10 *mn* et repart vers A avec une vitesse de 80 *km* à l'heure. En quel point et à quelle heure les deux trains se croisent-ils ?

703. Un piéton et un cycliste partent en même temps de deux villes A et B distantes de 16 *km*. Lorsque les deux mobiles vont à la rencontre l'un de l'autre ils se croisent au bout de 40 *mn*. Si le cycliste marche dans le sens de B vers A tandis que le piéton partant de A s'éloigne sur la route dans le sens de B vers A, la rencontre a lieu au bout de 1 *h* 20 *mn*. Trouver la vitesse des deux mobiles en supposant leurs mouvements rectilignes et uniformes.

704. Deux trains partent en même temps des points A et B, se dirigeant l'un vers l'autre. Calculer la distance AB et les vitesses de ces deux trains sachant : 1° que les deux trains se rencontrent 2 *h* après leur départ et que le point de croisement est à 15 *km* du milieu de AB ; 2° que si le train le plus rapide allait 2 fois plus vite, la rencontre aurait lieu après 1 *h* 12 *mn*.

705. Deux coureurs, Pierre et Paul, parcourent une même piste circulaire dans le même sens. Pierre dépasse immédiatement Paul et le rattrape 35 *mn* après le départ. Sachant que Paul met 1 *mn* 45 *s* pour faire un tour, on demande le temps que met Pierre pour faire aussi un tour.

706. Deux cyclistes roulent sur une piste circulaire de 360 *m* de tour, tantôt dans le même sens, tantôt en sens contraire. Quand ils marchent dans le même sens, le premier dépasse le deuxième toutes les minutes. Quand ils marchent en sens contraire, ils se croisent à intervalles réguliers de 12 *s*. Quelles sont les vitesses de ces cyclistes en mètres par seconde et en kilomètres à l'heure ?

707. Un avion de tourisme se déplace en ligne droite à la vitesse de 378 *km* à l'heure ; il émet un signal sonore de 8 *s* en 8 *s* et le son se propage à la vitesse de 336 *m* à la seconde.

1° Quel est, en mètres, l'espace parcouru par l'avion en 8 *s* ?

2° Quel est, en secondes et fraction de seconde, le temps mis par le son pour parcourir le même espace ?

3° Des postes d'écoute étant placés sur la route de l'avion, à quels intervalles perçoivent-ils les signaux successifs de l'avion, suivant qu'ils sont placés en avant ou en arrière de l'avion ?

Que représentent la moyenne de ces deux intervalles et leur différence ?

4° On ne connaît plus ni la vitesse de l'avion, ni l'intervalle de temps régulier séparant ces émissions sonores. Mais deux postes placés l'un à l'avant, l'autre à l'arrière, perçoivent respectivement ces émissions à des intervalles de 2 1/6 *s* et 3 5/6 *s*. En déduire la cadence à laquelle l'avion émet des signaux et la vitesse de cet avion.



CHAPITRE V

ARITHMÉTIQUE LITTÉRALE

RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DES PROBLÈMES

Classe de Cinquième des Lycées et Collèges.

38. Expressions littérales.
39. Égalités et équations.
40. Résolution algébrique des problèmes.

38. EXPRESSIONS LITTÉRALES

1. Représentation des nombres par des lettres.

Comme on a pu le voir au cours des leçons précédentes, on généralise les calculs en représentant les nombres qui y figurent ou simplement certains d'entre eux par des lettres.

1° Ainsi, les formules qui schématisent les *règles des opérations* relatives aux nombres, entiers, fractionnaires ou décimaux, se présentent sous une forme générale.

EXEMPLE : $(a + b - c) \times m = a \times m + b \times m - c \times m$,
pour a, b, c, m *quelconques*.

2° Si l'on doit résoudre plusieurs problèmes qui ne diffèrent que par leurs données numériques, *il est inutile* de recommencer chaque fois le même raisonnement.

EXEMPLE. — Quels que soient R et h, les calculs résumés par l'écriture $\pi R^2 h$ permettent d'obtenir le *volume d'un cylindre* de rayon R et de hauteur h.

2. Expressions littérales.

En utilisant ainsi les lettres dans l'expression des calculs, on est conduit à écrire des expressions dites ***littérales***.

EXEMPLES :

la ***somme*** $a + b + c$
la ***différence*** $a - b$

le ***produit*** ab
le ***quotient exact*** $\frac{a}{b}$,

et d'autres expressions moins simples telles que :

πR^2	$\pi R^2 h$	$\frac{\pi R^2 h}{3}$	$\frac{\pi d^3}{6}$.
Surface du cercle.	Volume du cylindre.	Volume du cône.	Volume de la sphère.

Lorsque l'on remplace dans une expression les lettres par des nombres, on obtient, après avoir effectué les calculs indiqués, un résultat qui s'appelle la ***valeur numérique*** de l'expression pour les valeurs données aux lettres.

REMARQUES.

1° Rappelons qu'une expression *entre parenthèses* est considérée comme *effectuée*. On peut donc, d'emblée, calculer sa valeur numérique.

EXEMPLE. — La valeur numérique, pour $a = 5$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 4$, $m = \frac{5}{3}$ de $(a + b - c) \times m$

est : $\left(5 + \frac{1}{2} - 4\right) \times \frac{5}{3}$ ou : $\frac{3}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{2}$.

2° Rappelons également qu'un *trait de fraction* indique la division du numérateur par le dénominateur, sans qu'il soit nécessaire d'écrire ces termes entre parenthèses.

EXEMPLE. — L'expression $\frac{a + b - c}{2a + b}$ se calcule de la même manière que : $(a + b - c) : (2a + b)$.

Pour les valeurs numériques $a = 6$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 4$, le numérateur est égal à $\frac{5}{2}$ et le dénominateur à : $2 \times 6 + \frac{1}{2} = \frac{25}{2}$.

L'expression a pour valeur numérique $\frac{5}{2} : \frac{25}{2} = \frac{1}{5}$.

3° Enfin, lorsqu'il n'y a pas de parenthèses, rappelons que l'on doit effectuer les multiplications ou les divisions *avant* les additions ou les soustractions.

EXEMPLES. — Pour $a = 4$, $b = 2$ et $c = 5$:

$$a + b \times c = 4 + 2 \times 5 = 4 + 10 = \mathbf{14} \quad \text{(et non } 6 \times 5 = 30\text{)}$$

$$a + \frac{b}{c} = 4 + \frac{2}{5} = 4 + 0{,}4 = \mathbf{4{,}4}.$$

Dans les paragraphes suivants, nous rappellerons les propriétés de certaines expressions littérales déjà étudiées, ainsi que les principales *règles des opérations* pouvant être effectuées sur des expressions littérales types.

3. Sommes. Différences. Polynômes arithmétiques.

1° *Propriétés.*

Commutativité de l'addition : $a + b + c + d = c + b + d + a.$

Associativité de l'addition : $a + b + c + d = (b + d) + a + c.$

Propriétés d'une différence : $a - b = (a + c) - (b + c).$

$a - b = (a - c) - (b - c).$

2° *Règles des opérations.*

Addition d'une somme : $a + (b + c) = a + b + c.$

Soustraction d'une somme : $a - (b + c) = a - b - c.$

Addition d'une différence : $a + (b - c) = a + b - c.$

Soustraction d'une différence : $a - (b - c) = a - b + c.$

Addition d'un polynôme arithmétique : $a + (b - c + d) = a + b - c + d.$

Soustraction d'un polynôme arithmétique : $a - (b - c + d) = a - b + c - d.$

4. Produits. Quotients exacts. Puissances.

1° *Propriétés.*

Commutativité de la multiplication : $a \times b \times c \times d = c \times d \times b \times a.$

Associativité de la multiplication : $a \times b \times c \times d = a \times c \times (b \times d).$

Définition du quotient exact : $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}.$

Propriété d'un quotient : $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$

2° *Règles des opérations.*

Multiplication d'une somme, ou d'une différence, par un nombre :
$$(a+b+c)\times m = am+bm+cm.$$
$$(a-b)\times m = am-bm.$$

Multiplication d'un polynôme arithmétique par un nombre :
$$(a+b-c+d)\times m = am+bm-cm+dm.$$

Multiplication d'un produit par un nombre :
$$(a\times b\times c)\times m = a\times(b\times m)\times c.$$

Multiplication de puissances d'un même nombre :
$$a^m\times a^n\times a^p = a^{m+n+p}.$$

Division de puissances d'un même nombre :
$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, & \text{si } m>n. \\ \dfrac{1}{a^{n-m}}, & \text{si } m<n. \end{cases}$$

EXERCICES

708. Écrire les expressions littérales suivantes :
— produit de la somme des nombres a et $2b$ par leur différence.
— quotient du produit des facteurs $2a$ et $3b$ par la somme de $2a$ et $3b$.
— produit de $5a$ par la somme des trois termes $2a$, $3b$, $\frac{c}{2}$.

709. Calculer pour $a=5$, $b=0{,}2$ et $c=\frac{2}{5}$, la valeur numérique des expressions :

$$a+2b-c \qquad 3a-10b+3c \qquad (a-b)(a+b)$$
$$\frac{a+3b-c}{2a} \qquad a+\frac{3b-c}{2a} \qquad a+3b-\frac{c}{2a}.$$

710. Calculer pour $B=220$, $b=32$ et $h=45$, la valeur numérique de l'expression
$$\frac{(B+b)\times h}{2}.$$
Signification du résultat?

711. Calculer, de deux manières différentes, pour $a=37/5$, $b=2/3$ et $c=5$, la valeur numérique de :
$$(2a+b-c)-(b+c)$$
$$(3a+2b+c)+(4a+2b+c)-(a+b-c).$$

712. Supprimer les parenthèses, puis mettre sous la forme la plus simple possible :
$$(52a+3b-12)-(48a-b-1)+(3a+2b-2)$$
$$(7a-b+4c)-(5a+b-2c)+(12a+3b+c)$$
$$(4a+2b-10)+(a-2b)-\left(a-\frac{b}{2}+3\right).$$

713. Simplifier les fractions :

$$\frac{6a + 12b}{15} \qquad \frac{10a - 15ab}{5a} \qquad \frac{4a \times 6b}{4}.$$

714. Les dimensions d'un parallélépipède rectangle sont a, b et c. On multiplie respectivement ses dimensions par 2, $\frac{1}{4}$ et 0,5. Que devient son volume ?

715. Le diamètre d'un cylindre est d et sa hauteur h. Si le diamètre était multiplié par 1,5 et la hauteur par $\frac{2}{3}$, que deviendrait le volume ?

Même question si le diamètre était multiplié par $\frac{2}{3}$ et la hauteur par 1,5 ?

716. Quel est le temps mis pour parcourir un trajet de d *km* (à l'aller) à la vitesse de v *km/h* ? pour parcourir la même distance (au retour) à la vitesse de v' *km/h* ?

Montrer que la durée totale du trajet est $\frac{d(v + v')}{vv'}$.

Calculer la valeur numérique de cette expression pour :

$d = 120$ *km* $\qquad v = 15$ *km/h* $\qquad v' = 12$ *km/h*.

717. Pour transformer en degrés Farenheit une température exprimée en degrés Celsius, on applique la formule :

$$F = \frac{9}{5} C + 32,$$

F et C étant les mesures, en degrés Farenheit et Celsius d'une même température.

Calculer F pour $C = 10°$, $C = 42°$, $C = 0°$.

39. ÉGALITÉS ET ÉQUATIONS

1. Définitions.

1° Si l'on effectue les deux calculs suivants :

$$3 \times (10 + 3) \quad \text{et} \quad 4 \times 10 - 1,$$

on obtient *deux résultats égaux* chacun à 39.

Donc : $3 \times (10 + 3) = 4 \times 10 - 1.$

Cette égalité est dite ***numérique***.

Par contre, l'égalité : $a - (b - c) = a - b + c$ est dite ***littérale***.

A condition que les valeurs numériques attribuées aux lettres a, b, c rendent possibles les opérations indiquées, l'égalité entre les expressions littérales $a - (b - c)$ et $a - b + c$ est toujours vérifiée.

2° Voici une autre égalité : $11 + x = 17$.

Nous constatons facilement qu'une *seule valeur* numérique de x transforme cette égalité en une égalité numérique : c'est le nombre 6.

En effet : $11 + 6 = 17.$

L'égalité : $11 + x = 17$ s'appelle une ***équation***.

Le premier membre de l'équation est $11 + x$, son second membre est 17.

La lettre x est l'***inconnue*** ; la valeur x qui transforme l'équation en une égalité numérique est la ***racine de l'équation*** : dans l'exemple précédent, la racine est 6.

On dit encore que la valeur 6 de l'inconnue *vérifie* l'équation.

Une équation à une inconnue est une égalité contenant une lettre (inconnue); cette égalité n'est vérifiée que pour une seule valeur numérique de l'inconnue.

Résoudre une équation à une inconnue, c'est en trouver la racine.

2. Première propriété des équations.

1° Addition d'un même nombre aux deux membres d'une équation.

Considérons l'équation : $x - 2 = 8,$ (1)

qui admet pour racine 10 (puisque $10 - 2 = 8$).

Aux deux nombres égaux $10 - 2$ et 8, ajoutons le ***même nombre***, 7 par exemple. Les deux résultats obtenus sont encore égaux :

$$(10 - 2) + 7 = 8 + 7.$$

L'équation : $(x - 2) + 7 = 8 + 7$ (2)

est donc vérifiée, comme l'équation (1), par la valeur $x = 10$ de l'inconnue.

De la comparaison des équations (1) et (2), il résulte qu'en ajoutant le même nombre aux deux membres de l'équation (1) nous avons obtenu une nouvelle équation qui a la même racine que la première.

2° Soustraction, quand c'est possible, d'un même nombre aux deux membres d'une équation.

Démonstration analogue à la précédente. En retranchant 5, par exemple, aux deux membres de l'équation :

$$x - 2 = 8 \qquad (1)$$

on obtient l'équation : $x - 7 = 3$,

qui a la même racine 10 que l'équation (1).

Mais l'opération n'est pas toujours possible : on ne peut, par exemple, retrancher 11 aux deux membres de l'équation (1).

D'où l'énoncé de la propriété suivante :

On peut ajouter, ou retrancher quand c'est possible, un même nombre aux deux membres d'une équation.

3. Applications.

1° *Considérons l'équation :* $x - 2 = 8$. (1)

Ajoutons le même nombre, 2, aux deux membres de l'équation :

$$x - 2 + 2 = 8 + 2.$$

Nous obtenons : $x = 8 + 2$ (2)

En comparant les équations (1) et (2), on voit que le terme 2, qui a changé de membre, a aussi changé de signe.

2° *Considérons l'équation :* $x + 4 = 7$.

Retranchons le même nombre, 4, aux deux membres de l'équation :

$$x + 4 - 4 = 7 - 4.$$

Nous obtenons : $x = 7 - 4$.

De ces deux exemples, on tire la règle suivante :

On peut, dans une équation, faire passer un terme d'un membre dans l'autre, à condition de changer son signe.

Ce passage s'appelle une *transposition*.

AUTRES EXEMPLES.

1° Résoudre l'équation :

$$38 - (10 - x) = 33.$$

Retranchons de 38 le terme $(10 - x)$:

$$38 - 10 + x = 33$$
$$28 + x = 33.$$

Faisons passer le terme 28 dans le second membre de façon à isoler le terme inconnu dans le premier membre :

$$x = 33 - 28$$
$$x = \mathbf{5}.$$

Vérification :

$$38 - (10 - 5) = 38 - 5$$
$$= 33.$$

2° Résoudre l'équation :

$$24 - (x + 7) = 15.$$

Retranchons de 24 le terme $(x + 7)$:

$$24 - x - 7 = 15$$
$$17 - x = 15.$$

Faisons passer le terme x dans le second membre et 15 dans le premier pour isoler le terme inconnu dans le second membre :

$$17 - 15 = x$$
$$2 = x$$

ou : $x = \mathbf{2}$.

Vérification :

$$24 - (2 + 7) = 24 - 9$$
$$= 15.$$

4. Deuxième propriété des équations.

1° Multiplication par un même nombre des deux membres d'une équation.

Considérons l'équation : $4\,x = 20$ (1)
qui admet 5 pour racine (puisque : $4 \times 5 = 20$).

Multiplions les deux nombres égaux 4×5 et 20 par le *même nombre*, 3 par exemple. Les deux résultats obtenus sont encore *égaux* :

$$(4 \times 5) \times 3 = 20 \times 3$$

L'équation : $4\,x \times 3 = 20 \times 3$ (2)
est donc vérifiée, comme l'équation (1), par la valeur $x = 5$ de l'inconnue.

De la comparaison des équations (1) et (2), il résulte qu'en multipliant par le même nombre les deux membres de l'équation (1) nous obtenons une nouvelle équation qui a la même racine.

2° Division par un même nombre des deux membres d'une équation.

Démonstration analogue à la précédente. En divisant par 2 les deux membres de l'équation : $4\,x = 20$ (1), on obtient l'équation $2\,x = 10$, qui a la même racine 5 que l'équation (1).

D'où l'énoncé de la propriété :

On peut multiplier, ou diviser, par un même nombre (différent de zéro) les deux membres d'une équation.

5. Applications.

La deuxième propriété des équations permet :

1° ***De calculer la racine d'une équation,*** telle que $4\,x = 20$.

(Le nombre 4 par lequel est multiplié l'inconnue x, dans l'équation, s'appelle le *coefficient* de x.)

Divisons par 4 les deux membres :

$$x = \frac{20}{4} \quad \text{ou} \quad x = 5.$$

2° ***De « chasser les dénominateurs »*** d'une équation, à la condition que ceux-ci soient égaux.

EXEMPLE : $$\frac{x}{3} - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}.$$

Multiplions par 3 les deux membres de l'équation :

$$x - 1 = 11.$$

Faisons passer le terme 1 dans le second membre :

$$x = 11 + 1 \quad \text{ou} \quad x = 12.$$

AUTRES EXEMPLES.

1° Résoudre l'équation :

$$3(x+1)+x-4=15.$$

Effectuons le produit de 3 par $(x+1)$:

$$3x+3+x-4=15.$$

Faisons passer les termes 3 et 4 dans le second membre :

$$3x+x=15-3+4$$
$$4x=15+1$$
$$4x=16.$$

Divisons par 4 les deux membres de l'équation : $x=\frac{16}{4}$ ou $x=4$.

Vérification :

$$3(4+1)+4-4=15$$
$$15=15.$$

2° Résoudre l'équation :

$$x-5=\frac{x+1}{2}-\frac{x+3}{5}.$$

Réduisons tous les termes au même dénominateur 10 :

$$\frac{10(x-5)}{10}=\frac{5(x+1)}{10}-\frac{2(x+3)}{10}.$$

Chassons le dénominateur commun 10 :

$$10(x-5)=5(x+1)-2(x+3)$$
$$(10x-50)=(5x+5)-(2x+6)$$
$$10x-50=5x+5-2x-6$$
$$10x-5x+2x=50+5-6$$
$$7x=49 \quad \text{ou} \quad x=\frac{49}{7}=7.$$

Vérification : $7-5=\frac{7+1}{2}-\frac{7+3}{5}$

$$7-5=4-2 \quad \text{ou} \quad 2=2.$$

EXERCICES

Vérifier l'exactitude des égalités :

718. $4\times 7+9=40-3.$

719. $5\times 9-3\times 6=2\times 10+7.$

720. $40-(5\times 6+1)=5+2\times 2.$

721. $150-\frac{1}{2}+4=2\times 50+3{,}5+50.$

Résoudre les équations :

722. $(x-10)+4=13.$

723. $40-(x-5)=33.$

724. $(x-4)+9=10.$

725. $9{,}5-(x-0{,}5)=4.$

726. $13=(x+4{,}5)+1{,}5.$

727. $3{,}4+x-0{,}5+17=34{,}5.$

Résoudre les équations :

728. $5x+14=9x+6.$

729. $35-4x=3x-14.$

730. $8x-14=12x-30.$

731. $37-(2x-5)=13.$

732. $2(x-2)+3(x-4)=3x+4.$

733. $3(x+5)-5(7-x)=12.$

Résoudre les équations :

734. $(x+2)-(x+1)+(x+4)=x+5.$

735. $5(3x-1)+4(3x+2)=12x+108.$

736. $(x+2)+(x+4)-(x+1)-(x+3)=17-x.$

737. $1{,}75(x+1)=0{,}2(x+2)+0{,}35(x+21).$

738. $0{,}5(3x-2)-0{,}2(x+4)=1{,}7(x-2).$

Résoudre les équations :

739. $\frac{2x-5}{6}=\frac{2+2}{4}.$

740. $\frac{2x-1}{13}=\frac{x+4}{20}.$

741. $\frac{3x-1}{5}=\frac{4x+1}{7}.$

742. $\frac{2x+1}{2x-5}=\frac{x-1}{x+1}.$

743. $\frac{3x-1}{13}-\frac{x-1}{2}=x-11.$

744. $\frac{x+2}{3}-\frac{x+4}{5}=\frac{28}{10}.$

745. $\frac{2x-1}{3}+\frac{5x}{6}=\frac{5x}{2}-\frac{2}{3}.$

746. $\frac{x}{2}+\frac{x}{5}-\frac{x}{4}=\frac{x+2}{4}+\frac{x-2}{3}.$

747. Quelles valeurs faut-il donner à m pour que les équations suivantes aient pour racine $\frac{7}{2}$: $m+x=12$? $x-m=\frac{1}{2}$?

40. RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DES PROBLÈMES

1. Une nouvelle méthode de résolution des problèmes : la méthode algébrique.

Vous savez résoudre certains problèmes par des méthodes de raisonnement dites « arithmétiques ». On vous a alors conseillé de vérifier la réponse obtenue, ce qui revient en général à vous assurer que *deux expressions numériques sont égales.*

On vous a demandé, par exemple, de *calculer la largeur d'un jardin rectangulaire, sachant que sa longueur surpasse de 12 m le triple de sa largeur et que son périmètre mesure 192 m.* Vous avez obtenu pour réponse 21 *m*. Vous avez fait la vérification en calculant d'abord la longueur en mètres du jardin :

$$21 \times 3 + 12 = 63 + 12 = 75 \; m,$$

puis, également en mètres, son périmètre :

$$(21 + 75) \times 2 = 96 \times 2 = 192 \; m.$$

La réponse que vous aviez calculée était donc *exacte.*

La méthode algébrique est « *calquée* » sur la vérification précédente. Mais, puisque vous ne connaissez pas la réponse, vous la désignerez par une lettre : c'est **l'inconnue.**

En procédant comme ci-dessus, vous serez amenés à écrire l'égalité de deux expressions, dont l'une au moins contiendra ***l'inconnue.***

Vous obtiendrez ainsi une ***équation*** que vous résoudrez.

2. Comment résoudre algébriquement un problème ?

Reprenons l'exemple précédent.

1° Le choix de l'inconnue est en général clairement indiqué par l'énoncé du problème : ici, on vous demande de *calculer la largeur du jardin.*

La largeur **(inconnue)** est désignée par une lettre, x par exemple ; on précise, en outre, que l'unité représentée par l'inconnue est le *mètre*.

2° Mise en équation. — La mise en équation est la traduction de l'énoncé au moyen de l'inconnue choisie, sans qu'il soit nécessaire de répéter le nom de l'unité employée.

Si la largeur du jardin est x, le triple de la largeur est $3x$ et la longueur est $(3x + 12)$.

Le demi-périmètre du jardin est donc : $x + (3x + 12)$ ou $4x + 12$.

Le périmètre du jardin est : $(4x + 12) \times 2$.

En écrivant que cette expression est égale au périmètre donné dans l'énoncé, on obtient l'équation :

$$(4x + 12) \times 2 = 192.$$

3° Résolution de l'équation. — Il suffit d'effectuer les calculs indiqués et d'appliquer les méthodes de résolution données dans la leçon précédente.

Effectuons la multiplication indiquée dans le premier membre :

$$8x + 24 = 192.$$

Faisons passer dans le second membre de l'équation le terme connu 24, de façon à isoler le terme 8 x, qui contient l'inconnue :

$$8\,x = 192 - 24$$
$$8\,x = 168.$$

Divisons par 8 les deux membres de l'équation :

$$x = \frac{168}{8} = 21.$$

4° Énoncé de la réponse. — La largeur du jardin est **21 m.**

5° Vérification.

$$(4 \times 21 + 12) \times 2 = 96 \times 2$$
$$= 192.$$

3. Remarque.

La réponse obtenue ne doit pas être absurde. Ainsi, par exemple, un nombre d'élèves ne peut pas être égal à 9,5, l'âge d'une personne ne peut pas être 315 ans.

Quand une solution algébriquement correcte conduit à un résultat absurde, *le problème posé est impossible.*

EXERCICES

748. Trois nombres consécutifs ont pour somme 1 314. Trouver le terme du milieu. En déduire les deux autres.

749. Albert et Josette possèdent ensemble 120 F. Albert dépense 35 F et Josette 10 F. Josette a alors 2 fois plus d'argent qu'Albert. Quel était l'avoir d'Albert et celui de Josette ?

750. J'avais une tige de cuivre de 75 *cm* de longueur. Je l'ai coupée en 4 tronçons mesurant, le premier 7,5 *cm*, le second 25 *cm* et le troisième 2 fois plus que le premier. Quelle est la longueur du quatrième tronçon ?

751. Un commerçant achète en « location-vente » une machine à écrire reconstruite. Il paie 160 F par mois de location pendant un certain nombre de mois, puis, pour acheter la machine, verse une somme de 640 F. Sachant qu'il a versé en tout 1 600 F, trouver le nombre de mois de location.

752. Une personne va à la ville voisine distante de 29 *km*. Elle marche pendant une demi-heure à pied, puis prend une bicyclette qu'elle utilise pendant 1 *h* $\frac{3}{4}$ à la vitesse de 15 *km* à l'heure. Calculer sa vitesse quand elle marche à pied.

753. Un automobiliste effectue une promenade de 330 *km*. Il parcourt une certaine distance à la vitesse de 75 *km* à l'heure, puis, par suite de la pluie, réduit sa vitesse de 15 *km*. Sachant qu'il a roulé 1 *h* de plus par temps pluvieux que par temps sec, dire combien a duré sa promenade. (Inconnue : temps pendant lequel il a roulé à 75 *km* à l'heure.)

754. Trois héritiers se partagent 17 000 F. Le second reçoit 1 000 F de plus que le premier. Le troisième a le double du second. Quelles sont les parts revenant à chaque héritier ?

755. Une personne voulant acheter une maison se décide à retirer d'entre les mains de ses débiteurs une somme égale pour en payer le montant ; en leur demandant à chacun 5 000 F, il lui manquerait encore 11 000 F, tandis qu'elle aurait 4 400 F de trop si elle demandait 6 400 F à chacun. Quels sont : le nombre des débiteurs, le prix de la maison, la somme que la personne doit réclamer à chaque débiteur ?

756. Un marchand de jouets possède en magasin un stock de poupées identiques. S'il les vend 45 F, il gagne 180 F. S'il les vend 49,50 F, il gagne 288 F. Combien a-t-il de poupées? Combien une poupée lui a-t-elle coûté?

757. Dans une salle de cinéma, il y a des premières à 6 F, des secondes à 4 F, des troisièmes à 3,20 F. Le nombre des secondes est triple de celui des premières. Le nombre des troisièmes est double de celui des premières. Toutes les places étant garnies, la recette atteint 2 440 F. Quel est le nombre de places de chaque catégorie?

758. Deux voyageurs prennent à la même gare d'autobus un billet pour la même destination. Le premier a, avant de prendre le billet, 28 F dans son porte-monnaie, et le second 69,60 F. Le billet payé, le second possède 3 fois plus que le premier. Trouver le prix du billet.

759. Un père a 30 ans de plus que son fils. Dans 4 ans, l'âge du père sera égal à 4 fois celui du fils. Trouver l'âge du père et l'âge du fils.

760. Dans un magasin travaillent 5 vendeuses et 3 employées de bureau. Une employée de bureau gagne par mois 60 F de plus qu'une vendeuse. La déclaration des salaires annuels de cette entreprise se monte à 82 320 F. Trouver le salaire mensuel d'une vendeuse, d'une employée de bureau.

761. Une longueur de 24 *m* de fibranne est partagée en deux coupons : le premier qui représente 5/12 de la longueur totale est vendu 12 F le mètre ; le second est soldé à un prix global inférieur de 2,40 F à celui du premier coupon. Trouver le pourcentage du rabais accordé.

762. Un garçon de recette encaisse trois effets de commerce. La valeur du second est les 2/3 de la valeur du premier et la valeur du troisième est égale à la somme des valeurs des deux premiers. Le garçon de recette rapporte 8 000 F. Trouver la valeur de chaque effet.

763. On retire d'un fût les 2/3 de sa contenance moins 30 *l*. On retire une seconde fois les 2/5 du reste. Le fût contient encore 72 *l*. Quelle est la capacité de ce fût?

764. Deux citernes à mazout, identiques, sont remplies jusqu'aux 9/10 de leur capacité. On puise dans la première 63 *l* et dans la seconde 141 *l*. A ce moment, le jaugeage indique qu'il reste dans la première 3 fois plus de mazout que dans la seconde. On demande la capacité des citernes.

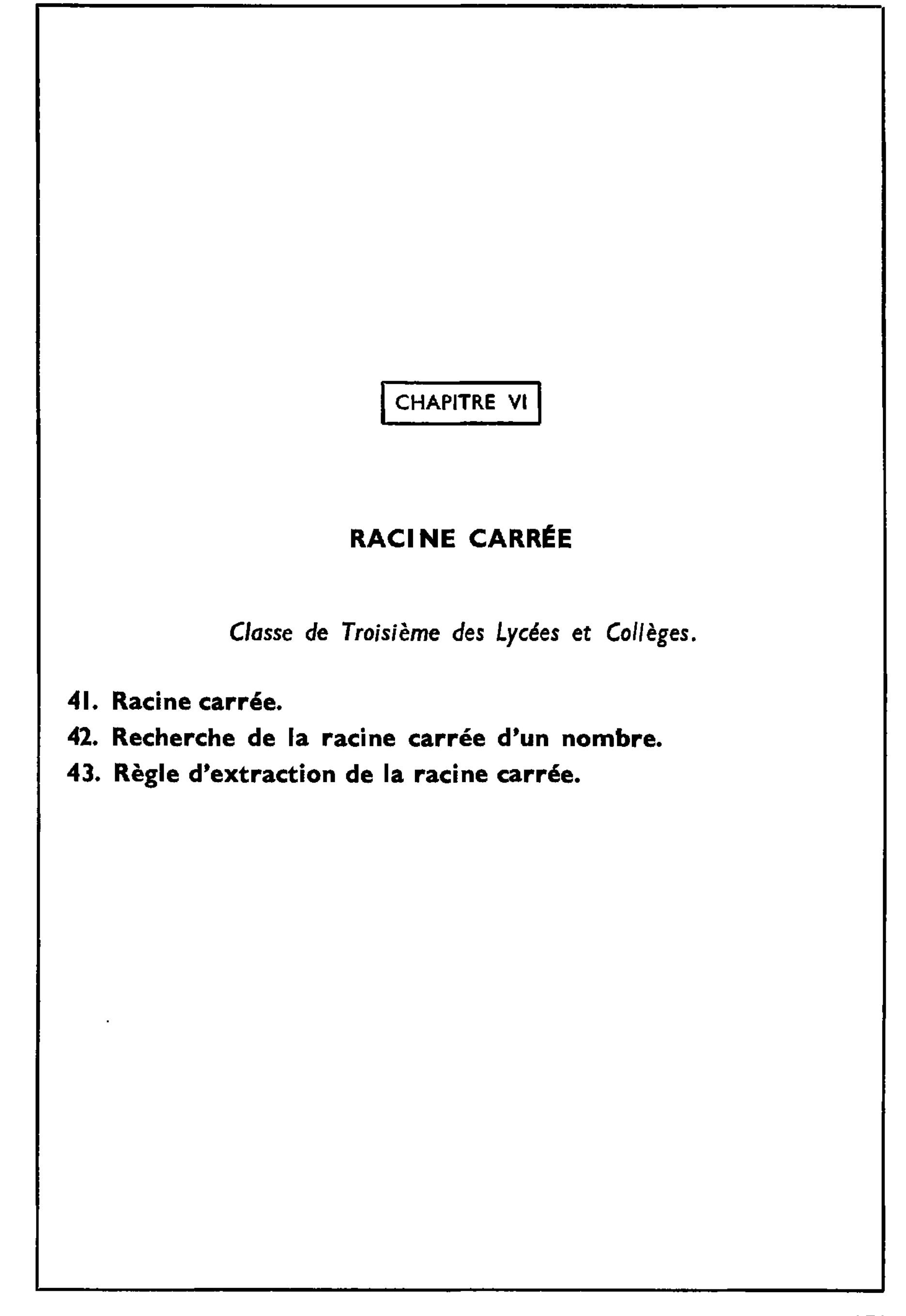
765. Deux personnes ont le même revenu. La première économise chaque année 1/5 de son revenu. La deuxième dépense 3 200 F par an de plus que la première. Au bout de 3 ans, la deuxième a fait 3 408 F de dettes. Quel est le revenu de chaque personne?

766. Dans une société en nom collectif, les bénéfices sont répartis de telle façon que le premier associé reçoive les 5/6 de la part du second et les 7/8 de la part du troisième. Répartir 93 600 F de bénéfice.

767. Une personne dépense les 2/3 de son argent, puis elle gagne une somme égale aux 3/7 de ce qui lui restait. Avec la somme qu'elle possède alors, elle peut payer les 2/5 d'une pièce de drap de 31,25 *m* valant 28,80 F le mètre. Combien avait-elle tout d'abord?

768. Le directeur d'une salle de théâtre dispose de 200 fauteuils d'orchestre, de 120 fauteuils de balcon et 100 de places de « première galerie ». Toutes les places étant occupées, la recette atteint 6 720 F. Sachant que le prix du fauteuil de balcon est le double du prix de la place de première galerie et que le prix du fauteuil d'orchestre est les 5/4 du prix du fauteuil de balcon, calculer les prix de la place de chaque catégorie.

769. Un automobiliste fait un voyage en trois étapes. Il effectue la première étape à la vitesse de 50 *km* à l'heure, la seconde à la vitesse de 60 *km* à l'heure et la troisième à la vitesse de 70 *km* à l'heure. Pour faire la deuxième étape, il a mis un temps égal aux 5/4 de la durée de la première étape et, pour faire la troisième, un temps juste égal au temps total mis pour faire les deux premières. Sachant qu'il a parcouru en tout 1 695 *km*, calculer la durée de chaque étape.



CHAPITRE VI

RACINE CARRÉE

Classe de Troisième des Lycées et Collèges.

41. Racine carrée.
42. Recherche de la racine carrée d'un nombre.
43. Règle d'extraction de la racine carrée.

41. RACINE CARRÉE

I. Carré d'un nombre.

Rappelons que ***le carré d'un nombre est le produit de ce nombre par lui-même.*** Par exemple :

le carré de 7 est $7 \times 7 = \mathbf{49}$,
le carré de 2,5 est $2{,}5 \times 2{,}5 = \mathbf{6{,}25}$,
le carré de $\frac{3}{4}$ est $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{16}}$,
le carré de a est $a \times a = \mathbf{a^2}$.

Les carrés de nombres entiers sont dits « ***carrés parfaits*** ».

Les élèves ont intérêt à connaître par cœur les carrés des 20 premiers nombres entiers :

Nombres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Carrés	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**81**	**100**
Nombres	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Carrés	**121**	**144**	**169**	**196**	**225**	**256**	**289**	**324**	**361**	**400**

REMARQUES. — 1° La relation $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = n^2 + n + (n+1)$ montre comment on peut obtenir, *par une simple addition*, le carré d'un nombre connaissant le carré qui le précède immédiatement.

Par exemple, pour $n = 16$:

$$(16+1)^2 = 16^2 + 16 + 17$$
$$17^2 = 256 + 16 + 17 = \mathbf{289}.$$

2° Un nombre étant décomposé en ses *facteurs premiers*, on peut reconnaître aisément s'il est carré parfait.

En effet, soit par exemple N le carré du nombre entier égal à $a = 2^3 \times 3^2 \times 5$,

$$N = a^2 = (2^3 \times 3^2 \times 5)^2 = 2^6 \times 3^4 \times 5^2.$$

Les exposants des facteurs premiers du carré parfait N sont donc des *nombres pairs*. Le nombre $2^6 \times 3^4 \times 5^2$ est un carré parfait.

Au contraire, $N = 3^3 \times 5^2 = 675$ n'est pas un carré parfait parce que l'exposant du facteur 3 est impair.

Donc, un nombre est un carré parfait si, décomposé en ses facteurs premiers, les exposants de ces facteurs sont tous pairs.

2. Racine carrée exacte d'un carré parfait.

EXEMPLE : 81 étant le carré de 9, le nombre 9 est la ***racine carrée*** de 81.

On écrit :

$$9 = \sqrt{81}.$$

Le symbole $\sqrt{\ }$ est appelé ***radical*** et se lit : « *racine carrée de...* »

D'une manière générale, A étant le carré de a, c'est-à-dire A étant égal à a^2 :

$$a = \sqrt{A}.$$

DÉFINITION. — ***La racine carrée exacte a d'un carré parfait A est le nombre dont le carré a^2 est égal au carré parfait A.***

Extraire la racine carrée d'un nombre, c'est calculer sa racine carrée.

3. Racine carrée approchée, à une unité près par défaut, d'un nombre entier non carré parfait.

Lorsqu'un nombre entier N n'est pas un carré parfait, il peut être « inséré » entre les carrés de deux nombres consécutifs. Par exemple, si N = 183 :

$$169 < 183 < 196 \quad \text{ou} \quad 13^2 < 183 < 14^2.$$

On dit alors que 13 est la racine carrée, à moins d'une unité près ***par défaut***, de 183.

Le nombre 14 est la racine carrée, à moins d'une unité près par excès, de 183.

Pour simplifier le langage, on dit que 13 est la *racine carrée, à une unité près*, de 183, en sous-entendant qu'il s'agit de la racine approchée par défaut.

D'où la définition :

La racine carrée, à une unité près, d'un nombre entier N non carré parfait est le plus grand nombre entier a dont le carré soit inférieur à N :

$$a^2 < N < (a + 1)^2.$$

Le nombre N étant supérieur à a^2, la différence N — a^2 s'appelle le ***reste de la racine carrée.*** En désignant ce reste par r :

$$r = N - a^2 \quad \text{ou} \quad N = a^2 + r.$$

4. Relations entre lès nombres N, *a* et *r*.

1° La relation $N = a^2$ et la relation $a^2 < N < (a + 1)^2$ expriment, la première, que a est la racine carrée du carré parfait N et la seconde que a est la racine carrée approchée du nombre entier N, non carré parfait, à 1 unité près par défaut.

La relation unique :

$$a^2 \leqslant N < (a + 1)^2$$

signifie, *dans tous les cas*, que a est la racine carrée, à 1 unité près, de N.

2° Remplaçons, dans l'inégalité $N < (a + 1)^2$ écrite ci-dessus, N par sa valeur $a^2 + r$:

$$a^2 + r < (a + 1^2)$$
$$a^2 + r < a^2 + 2a + 1$$
$$r < 2a + 1$$

ou, puisqu'il s'agit de nombres entiers : $r \leqslant 2a$.

Le reste de la racine carrée d'un nombre entier est au plus égale au double de ce nombre.

En définitive, la racine carrée, à 1 près, d'un nombre entier N est le nombre entier a défini par l'un ou l'autre des systèmes de relations :

$$a^2 \leqslant N < (a+1)^2$$

$$N = a^2 + r \qquad r \leqslant 2a$$

5. Racine carrée approchée, à une unité près, d'un nombre N, entier ou décimal.

Le cas de N entier ayant été étudié dans le paragraphe 3, il suffit d'examiner le cas où N est décimal.

Considérons, par exemple, le nombre décimal N = 28,35.

Le nombre N peut être inséré entre les carrés de deux nombres *entiers* consécutifs :

$$25 < 28{,}35 < 36 \qquad \text{ou} \qquad 5^2 < 28{,}35 < 6^2.$$

Le nombre 5 est la racine carrée, à 1 près par défaut, de 28,35. Si l'on remarque que 5 est aussi la racine carrée, à 1 près par défaut, du nombre entier 28, qui est la *partie entière* de 28,35, on dira que :

La racine carrée, à 1 près par défaut, d'un nombre décimal est égale à la racine carrée, à 1 près par défaut, de sa partie entière.

6. Racine carrée, à une unité décimale près, d'un nombre quelconque.

EXEMPLE. — Soit le nombre 19 ; sa racine carrée entière est comprise entre 4 et 5. Cherchons les carrés des nombres de dixièmes 4,1 ; 4,2 ; 4,3... compris entre 4 et 5 :

Nombres.	$\frac{41}{10}$ ou 4,1	$\frac{42}{10}$ ou 4,2	$\frac{43}{10}$ ou 4,3	$\frac{44}{10}$ ou 4,4	etc...
Carrés.	16,81	17,64	18,49	19,36	etc...

Nous constatons que :

$$18{,}49 < 19 < 19{,}36 \qquad \text{ou} \qquad 4{,}3^2 < 19 < 4{,}4^2,$$

ou

$$\left(\frac{43}{10}\right)^2 < 19 < \left(\frac{44}{10}\right)^2.$$

Le nombre 4,3 est la racine carrée, à moins de 1/10 près par défaut, du nombre 19.

Plus généralement :

La racine carrée à 1/10, à 1/100, à 1/1 000... près par défaut d'un nombre N est la plus grande fraction de dénominateur 10, 100, 1 000... dont le carré est inférieur ou égal à N.

La table, page 226, donne les racines carrées, à 1/1 000 près, des 100 premiers nombres entiers.

7. Généralisation du symbole $\sqrt{A}$.

Lorsque A est le carré d'un nombre *a*, entier ou fractionnaire, le symbole $\sqrt{A}$ représente la racine carrée de A.

EXEMPLES :

$$\sqrt{25} = 5, \quad \text{car} \quad 5^2 = 25$$
$$\sqrt{1{,}69} = 1{,}3, \quad \text{car} \quad 1{,}3^2 = 1{,}69$$
$$\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}, \quad \text{car} \quad \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}.$$

Mais lorsque N *n'est pas le carré* d'un nombre entier ou fractionnaire, le symbole $\sqrt{N}$ ne représente aucun nombre entier ou fractionnaire : un tel nombre est dit *irrationnel*, par opposition aux nombres entiers et fractionnaires qui constituent *l'ensemble des nombres rationnels.*

Ainsi : 4 0,35 et $\frac{3}{5}$ sont des nombres rationnels.

$\sqrt{2}$ $\sqrt{7}$ et $\sqrt{99}$ sont des nombres irrationnels.

EXERCICES

Décomposer en produits de facteurs premiers les nombres suivants, montrer qu'ils sont carrés parfaits et calculer la racine de chacun d'eux :

770.	441	576	3 025	1 764	19 600	23 104.
771.	2 304	9 025	8 649	921 600	152 100	11 881.

772. Quel est le plus petit nombre entier par lequel il faut multiplier 63 pour obtenir un carré parfait? Quel est ce carré? Quelle est sa racine?

773. On élève au carré un nombre entier de deux chiffres : $10\,d + u$. Par quels chiffres peut être terminé ce carré? Même question pour un nombre entier quelconque.
A première vue, les nombres 573, 1 247, 3 009, 15 428, 301 sont-ils, ou non, des carrés parfaits ?

774. Pour calculer 35^2, on peut multiplier 3 par 4, puis écrire 25 à la droite du produit obtenu. Calcul analogue pour 55^2, 85^2... Pourquoi?

775. La différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs est 37. Quels sont ces nombres?

776. La différence des carrés de deux nombres pairs consécutifs est 148. Quels sont ces nombres?

777. Deux nombres ont pour somme 32 et la différence de leurs carrés est 64. Quels sont ces nombres?

778. Deux nombres ont pour différence 7 et la différence de leurs carrés est 217. Quels sont ces nombres?

779. Montrer que le produit de deux nombres consécutifs ne peut pas être un carré parfait. Montrer que la racine carrée, à 1 près par défaut, de ce produit est égale au plus petit des deux nombres.

42. RECHERCHE DE LA RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE

Pour trouver la racine carrée d'un nombre, on peut utiliser des tables de carrés ou des tables de racines carrées (p. 226 pour les nombres de 1 à 100, ainsi que les *Tables Chevalier et Cluzel*, Éd. Delagrave pour les nombres de 1 à 1 000).

1. Tables des carrés.

Pour calculer la racine carrée d'un nombre entier N, on cherche si N figure dans la table des carrés (p. 226).

1° S'il en est ainsi, une *simple lecture* donne la racine carrée de N.

Par exemple : $\sqrt{3\,721} = \mathbf{61}$ (racine carrée exacte).

2° Si N est un nombre entier qui ne figure pas dans la table, il est compris entre deux nombres entiers de cette table. Par exemple, 6 752 est compris entre 6 724 et 6 889, ce qui s'écrit :

$$6\,724 < 6\,752 < 6\,889$$

ou :

$$82^2 < 6\,752 < 83^2 \qquad (1)$$

Le nombre ***82 est donc la racine carrée*** à 1 unité près, par défaut, de 6 752 et 83 est la racine carrée à 1 unité près, par excès, de 6 752.

REMARQUE. — La table des carrés permet également la recherche de la racine carrée de certains nombres décimaux.

Ainsi, divisons par 100 (ou 10^2) les membres de la double inégalité (1) :

$$\frac{82^2}{100} < 67{,}52 < \frac{83^2}{100}$$

ou :

$$\left(\frac{82}{10}\right)^2 < 67{,}52 < \left(\frac{83}{10}\right)^2$$

ou :

$$8{,}2^2 < 67{,}52 < 8{,}3^2.$$

Le nombre 8,2 est donc la racine carrée, à 1/10 près par défaut, de 67,52.

Avec une table des carrés des nombres de 1 à 1 000 on obtient, d'une manière analogue :

$\sqrt{67\,081} = \mathbf{259}$ (racine exacte),

$\sqrt{630\,729} = \mathbf{794}$, à 1 unité près par défaut,

$\sqrt{22{,}5712} = \mathbf{4{,}75}$ à 1/100 près par défaut.

2. Tables des racines carrées.

La table de la page 226 donne les racines, à 1/1 000 près, des nombres entiers compris entre 1 et 100. Les racines *par excès* sont distinguées des racines *par défaut* au moyen d'astérisques.

Par exemple :

$\sqrt{91} = \mathbf{9{,}539}$, à 1/1 000 près par défaut.

$\sqrt{58} = \mathbf{7{,}616}$, à 1/1 000 près par excès.

REMARQUE. — Cette table permet également de calculer les racines de certains nombres entiers ou décimaux.

Par exemple, l'inégalité :

$$9,539^2 < 91 < 9,540^2$$

montrant, comme nous venons de le voir, que 9,539 est la racine à 1/1 000 près par défaut de 91, multiplions par 100 (ou 10^2) les membres de cette inégalité.

Nous obtenons : $9,539^2 \times 10^2 < 9\,100 < 9,540 \times 10^2$.

$$95,39^2 < 9\,100 < 95,40^2$$

ce qui prouve que ***95,39*** est la racine carrée, à 1/100 près, de 9 100.

De même l'inégalité :

$$\frac{9,539^2}{100} < 0,91 < \frac{9,540^2}{100}$$

qui peut s'écrire : $0,9539^2 < 0,91 < 0,9540^2$

montre que 0,953 9 est la racine carrée, à 1/10 000 près, de 0,91.

Avec une table des racines carrées des nombres de 1 à 1 000 on obtient, d'une manière analogue :

$$\sqrt{543} = \mathbf{23,302\ 4}$$
$$\sqrt{25\,300} = \mathbf{159,06}$$
$$\sqrt{7,09} = \mathbf{2,662\ 71}.$$

EXERCICES

Au moyen de la table des carrés, calculer la racine carrée des nombres suivants en indiquant, s'il y a lieu, l'approximation :

780.	361	2 209	9 409	5 476	3 844.
781.	250	4 312	524	8 314	9 500.
782.	18,49	47,61	2,89	46,24	88,36.
783.	504 100	291 600	0,2116	0,9025	0,1444.

Au moyen de la table des racines carrées, calculer la racine carrée des nombres suivants :

784.	50	5 000	39	3 900	0,39.
785.	47	4 700	0,47	470 000	0,0047.
786.	52	0,52	49	490 000	3 700
787.	0,43	4 300	9 900	0,0008	0,0045

43. EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE

La technique de l'opération qui permet de calculer la racine carrée d'un nombre est dite « ***extraction de la racine carrée*** ». Nous nous bornerons à indiquer, sans le justifier, le procédé usuel d'extraction.

I. Racine carrée, à une unité près, d'un nombre entier N.

EXEMPLE : $N = 73\,582$.

L'opération se dispose comme une division : le nombre donné N occupe la place du dividende et la racine carrée, celle du diviseur.

7.3 5.8 2	271
4	
3 3.5	48 × 8 = 384
3 2 9	47 × 7 = 329
6 8.2	
5 4 1	541 × 1 = 541
1 4 1	

1° *Partageons le nombre en tranches de deux chiffres*, à partir de la droite : 7.35.82.

La dernière tranche à gauche peut n'avoir qu'un seul chiffre.

2° *Cherchons la racine, à 1 près*, du nombre formé par la première tranche de gauche, ici 7.

Le nombre trouvé (2) est le premier chiffre de la racine.

3° Élevons 2 au carré et retranchons ce carré, 4, de 7 ; il reste 3. A la droite de 3, abaissons la tranche suivante, 35 ; nous formons ainsi le nombre 335.

Sur la droite du nombre 335, séparons un chiffre, qui est ici 5. Divisons la tranche de gauche de 335, c'est-à-dire 33, par le double de la racine qui est 4. Écrivons le quotient obtenu, 8, à la droite de 4.

Multiplions 48 par 8. Le produit obtenu, 384, étant supérieur à 335, remplaçons le chiffre 8 par le chiffre immédiatement inférieur, 7, et recommençons avec 7 les opérations faites avec 8. Multiplions donc 47 par 7. Le produit obtenu, 329, étant inférieur à 335, retranchons-le de 335 ; il reste 6.

Le nombre trouvé (7) est le deuxième chiffre de la racine.

4° Le chiffre suivant de la racine s'obtient de la même manière. Abaissons la tranche suivante, 82 ; puis séparons un chiffre sur la droite du nombre 682 et divisons la tranche de gauche, 68, par le double de la racine déjà écrite, 54.

Le quotient trouvé 1, étant écrit à la droite de 54, multiplions 541 par 1, et retranchons de 682 le produit 541 ; il reste 141.

Le nombre trouvé (1) est le troisième chiffre de la racine.

La racine carrée de 73 582, à une unité près, est 271 et le reste 141.

$$\begin{cases} 73\,582 = 271^2 + 141 \\ 141 < 271 \times 2 \end{cases}$$

7.35.82	271
3 35	47 × 7
6 82	541 × 1
1 41	

Pratiquement, on évite d'écrire tous les calculs et l'opération se présente alors comme il est indiqué ci-contre.

2. Preuve par 9 de la racine carrée.

Si l'opération précédente est exacte, il résulte, de l'égalité : 73 582 = $271^2 + 141$, que les restes des divisions par 9 de $271^2 + 141$ et de 73 582 sont *égaux*.

271 = mult. 9 + 1 271^2 = (mult. 9 + 1)^2 = mult. 9 + 1 141 = ... mult. 9 + 6 $271^2 + 141$ = ***mult. 9 + 7***	73 582 = mult. 9 + 25 ou 73 582 = ***mult. 9 + 7.***

Pour que l'opération soit exacte, il faut que les deux restes par 9 soient égaux. Mais cela ne suffit pas : il faut en outre s'assurer que l'inégalité 141 < 271 × 2 est vérifiée.

1 + 6 = 7 (croix : 1 en haut, 7 à gauche, 7 à droite, 1 en bas)

Pratiquement, on adopte la même disposition que s'il s'agissait d'une *division* dont le dividende est le nombre donné, et dont le diviseur et le quotient sont égaux à la racine obtenue.

3. Racine carrée, à une unité près, d'un nombre décimal N.

EXEMPLE : $N = 54{,}025$.

La racine carrée, à 1 près, de ce nombre décimal, est ***la même*** que celle de sa partie entière 54 (41[eme] leçon, § 5), c'est-à-dire *7*.

4. Racine carrée, à 1/10, 1/100, 1/1 000... près d'un nombre quelconque.

Pour calculer la racine carrée, à 1/10, 1/100, 1/1 000... près, d'un nombre quelconque, on *multiplie ce nombre* par 100, 10 000, 1 000 000..., et l'on extrait la racine carrée du nombre obtenu. On *divise* ensuite le résultat par 10, 100, 1 000...

EXEMPLES :

$\sqrt{22}$, à 1/100 près.

22.0 0.0 0	4,69
6 0.0	86 × 6 = 516
8 4 0.0	929 × 9 = 8 361
3 9	

1 + 3 = 4 (croix : 1 en haut, 4 à gauche, 4 à droite, 1 en bas)

La racine de 22, à 1/100 près, est :

4,69.

$\sqrt{73{,}5}$ à 1/100 près.

73,50 00 00	8,573
9 50	165 × 5 = 825
1 25 00	1 707 × 7 = 11 949
5 51 00	17 143 × 3 = 51 429
36 71	

(croix : 5 en haut, 6 à gauche, 6 à droite, 5 en bas)

La racine de 73,5, à 1/1 000 près, est :

8,573.

Pratiquement :

1° On *écrit la virgule de la racine* dès que l'extraction de la racine de la partie entière du nombre est terminée.

2° On n'écrit pas de zéros à la droite du nombre. On abaisse les tranches de deux chiffres à la droite des restes successifs, ces tranches étant soit complétées par un zéro s'il reste un chiffre significatif non encore pris, soit formées de deux zéros. On arrête l'opération quand on a obtenu, à la racine, le nombre de chiffres demandé.

5. Racine carrée d'une fraction.

On convertit la fraction en un nombre décimal contenant autant de tranches de deux chiffres décimaux que l'on veut obtenir de chiffres décimaux à la racine.

EXEMPLE : $\sqrt{\frac{8}{11}} = \sqrt{0{,}7272} = \boldsymbol{0{,}85}$, à 1/100 près.

Pratiquement, on a donc calculé le *quotient*, à 1/10 000 près, du numérateur par le dénominateur de la fraction, puis la *racine carrée,* à 1/100 près, de ce quotient.

EXERCICES

788. ***Calcul du côté d'un carré : application à l'extraction de la racine carrée d'un nombre.***

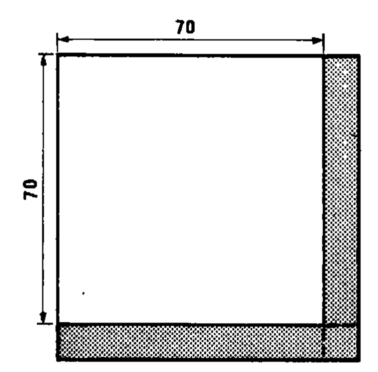


Fig. 1. — Calculer le *côté d'un carré* de 6 194 m^2 de surface.

1° Un carré a 6 194 m^2 de surface (fig. 1). Pourquoi son côté est-il compris entre 70 et 80 *m*?

2° Dessiner le carré donné et le carré de 70 *m* de côté de manière à mettre en évidence la différence des surfaces 1 294 m^2.

3° Montrer que 1 294 m^2 représente la somme des surfaces de deux rectangles et d'un carré.

4° Quelle est la somme des longueurs des deux rectangles ?
En négligeant le carré, comment peut-on trouver la largeur des rectangles?

$$\left(\text{On sera amené à calculer : } \frac{1\,294}{2 \times 70} = 9.\right)$$

5° Vérifier si la largeur trouvée 9 n'est pas trop grande ; chercher pour cela si la somme des surfaces des rectangles et du carré est inférieure à 1 294 :

$$2 \times 70 \times 9 + 9^2 = 1\,341. \qquad (1)$$

6° Puisque 1 341 > 1 294, prendre pour largeur 8 et calculer :

$$2 \times 70 \times 8 + 8^2 = 1\,184. \qquad (2)$$

7° En conclure que le côté du carré est 78 *m* à 1 *m* près par défaut.

8° Montrer que les expressions (1) et (2) peuvent s'écrire :

$$140 \times 9 + 9^2 = (140 + 9) \times 9 = 149 \times 9$$
$$(140 \times 8) + 8^2 = (140 + 8) \times 8 = 148 \times 8.$$

9° Rapprocher la méthode employée de la règle d'extraction de la racine carrée à 1 près du nombre 6 194.

789. ***Recherche de la racine carrée d'un nombre par la méthode des divisions successives.***

Soit à calculer la racine carrée de 876 928.

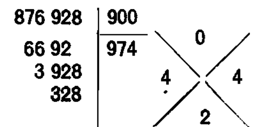
1° La racine a 3 chiffres. Pourquoi? Le premier chiffre est 9. Pourquoi?

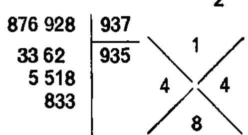
2° Divisons 876 928 par 900 : quotient entier 974.

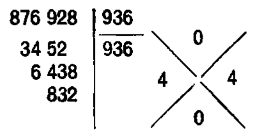
La moyenne arithmétique de 900 et 974 est : $\frac{900 + 974}{2} = 937$.

3° Divisons 876 928 par 937 : quotient entier 935.

La moyenne arithmétique de 937 et 935 est : $\frac{937 + 935}{2} = \mathbf{936}$.







936 est *la racine carrée* de 876 928.

Extraire les racines carrées des nombres :

790. à 1 près : 250 1 369 1 045 61 504 400 212 2 704 625.

791. à 0,01 près : 0,1936 843 25 471 876 928 32,4238 0,417 0,08.

792. à 0,01 près : 7 3,42 1 745 8 766 1 000 812,9 0,3657.

793. Trouver la valeur de x dans chacune des expressions suivantes :

$$x^2 \times 5 = 3\,125 \qquad (x^2 + 3) \times 7 = 12\,964 \qquad 4\,\pi x^2 = 150.$$

794. Sachant que le rayon R de la base d'un cône dont la hauteur est h et le volume V est donné par la formule : $R = \sqrt{\frac{3\,V}{\pi h}}$, calculer le rayon d'un cône de 12 *cm* de hauteur et de 250 cm^3 de volume ($\pi = 3{,}1416$).

795. Calculer les racines carrées des fractions : $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{18}{64}$, $\frac{43}{48}$ (avec 2 décimales).

796. Trouver un nombre tel que si, d'une part, on lui ajoute 4 et si, d'autre part, on lui retranche 4, le produit des deux nombres ainsi obtenus est 609.

797. Déterminer un nombre n par les conditions suivantes :

1° si l'on extrayait la racine carrée de ce nombre tel quel, on aurait une racine par défaut avec un reste égal à 8;

2° si l'on extrayait la racine carrée du nombre préalablement augmenté de 9, on aurait une racine exacte qui serait précisément égale à la racine carrée par excès du nombre primitif.

PROBLÈMES SUR LE CHAPITRE VI

798. Sachant que la distance parcourue par un corps qui tombe en chute libre, pendant un temps t, est :

$$e = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2,$$

v_0 désignant la vitesse au départ et g l'accélération due à la pesanteur ($g = 9{,}80$ *m/s/s* à Paris), calculer les différentes valeurs de e pour :

$$v_0 = 2 \; m/s \quad \text{et} \quad t = 1\,s,\ 2\,s,\ 3\,s,\ 10\,s,\ 15\,s.$$

799. En appliquant la formule donnée dans l'énoncé du problème précédent, calculer au bout de combien de secondes un corps, parti à vitesse nulle ($v_0 = 0$), et tombant en chute libre, aura parcouru 9,8 *m*, 39,2 *m*, 50 *m*, 100 *m*.

800. En diminuant de 1 *cm* le côté d'une tôle carrée, sa surface diminue de 29 cm^2. Quel était le côté de la première tôle?

801. On veut remplacer deux poutres en bois dont les sections carrées ont respectivement 32 *cm* et 28 *cm* de côté par une seule poutre à section carrée dont la section sera la somme des sections des deux poutres remplacées. Quel sera le côté de la section de la nouvelle poutre?

802. Calculer les dimensions à donner à une plaque de tôle rectangulaire de 972 cm^2 de surface sachant que sa largeur doit être les 3/4 de sa longueur.

803. Calculer les dimensions de la section d'une barre de fer sachant que cette section a 2 592 mm^2 et que sa longueur est le double de sa largeur.

804. On dispose de 1 293 dalles carrées avec lesquelles on veut recouvrir des surfaces de forme carrée. Combien utilisera-t-on de dalles pour recouvrir la plus grande surface qu'il soit possible de recouvrir? Combien utilisera-t-on de dalles pour recouvrir la plus grande surface qu'il soit possible de recouvrir avec les dalles qui restent? Ces deux surfaces étant recouvertes, combien utilisera-t-on de dalles pour recouvrir la plus grande surface qu'il soit possible de recouvrir avec les dalles qui restent?

805. Quel est le côté du carré équivalent à un triangle de 9,60 *m* de base et de 10,80 *m* de hauteur?

806. On sait que les ouvriers modeleurs des fonderies, pour tenir compte du retrait de la fonte, utilisent des mètres dont la longueur réelle est de 101 *cm*.

Une plaque d'égout, venue de fonte, a la forme d'un rectangle de 1,08 m^2 de surface, sa longueur est les 4/3 de sa largeur.

1° Quelles dimensions exactes devra avoir le modèle en bois?

2° De quelle surface diminuera la pièce au retrait?

807. Un bassin rectangulaire contient de l'eau jusqu'aux 5/9, à partir du fond, de sa hauteur. On y ajoute 6,3 *hl* d'eau. Le niveau monte de 0,50 *m* et atteint les 6/7 de la hauteur. Calculer la hauteur du bassin et les deux autres dimensions, sachant que la largeur est les 3/5 de la longueur.

808. En mesurant au pas une esplanade rectangulaire, on a trouvé que sa longueur est de 425 pas et sa largeur de 283 pas. Sachant que sa surface est 69 740,84 m^2, calculer la longueur d'un pas.

809. Un terrain carré a été mesuré avec une chaîne d'arpenteur que l'on croyait d'une longueur de 10 *m*, mais qui avait 3 *cm* de moins. On a trouvé pour surface 6 *ha* 75 *a* 3 *ca*. Quel est le côté du carré et la superficie réelle du terrain?

810. On découpe sur le pourtour d'une plaque de tôle rectangulaire une bande de 2 *cm* de largeur. La surface de cette bande étant 176 cm^2 et la longueur de la plaque obtenue étant le triple de sa largeur, calculer les dimensions de la plaque.

811. Un ferblantier dispose de deux feuilles carrées, l'une de fer galvanisé, l'autre de fer-blanc. La surface de la première surpasse de 1 219 cm^2 celle de la seconde. D'autre part, le périmètre de la feuille galvanisée est supérieur de 92 *cm* à celui de la feuille de fer-blanc. Quelle est la surface de chaque feuille?

812. Avec de la tôle pesant 50 *g* par décimètre carré, on construit un vase cylindrique sans couvercle dont la hauteur est égale au diamètre de la base. Le poids total de la tôle employée est 635,8 *g*. Trouver le diamètre et la capacité du vase.

813. Un terrain rectangulaire peut se diviser exactement en lots de 250 m^2, en lots de 300 m^2, en lots de 350 m^2. Sa surface étant comprise entre 10 et 12 *ha*, et sa largeur étant les 5/21 de sa longueur, trouver ses deux dimensions.

CHAPITRE VII

RAPPORTS ET PROPORTIONS

APPLICATIONS

Classe de Troisième des Lycées et Collèges.

Classe de Seconde terminale des Collèges d'enseignement général.

44. RAPPORT DE DEUX NOMBRES

I. Définition.

1° Nous avons, dans une précédente leçon (p. 125), défini le quotient exact q du nombre entier a par le nombre entier b (b étant différent de zéro).

Ainsi le quotient exact de 15 par 3 est 5 (*nombre entier*), parce que $3 \times 5 = 15$.

Celui de 22 par 9 est $\frac{22}{9}$, parce que $\frac{22}{9} \times 9 = 22$. Il s'écrit sous la forme d'une ***fraction***. Les deux termes de cette fraction sont des nombres entiers.

2° Écrivons maintenant l'expression du quotient exact de $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{7}$; nous obtenons :

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}.$$

Cette expression s'appelle *fraction généralisée* ou ***rapport***.

Le quotient du nombre irrationnel $\sqrt{2}$ par 3 s'écrit : $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C'est encore un rapport.

Le rapport d'un nombre a à un nombre b est un troisième nombre q dont le produit par b est égal à a.

Il s'écrit : $q = \frac{a}{b}$ et se lit : « a sur b ». Le trait de rapport est, en général, plus appuyé qu'un trait de fraction.

Donc : $\quad q = \frac{a}{b} \iff b \times q = a \quad$ (sous la condition $b \neq 0$).

Les nombres a et b peuvent être entiers, fractionnaires, rationnels ou irrationnels. On les appelle les *termes du rapport*, a étant le *numérateur* ou le premier terme, b le *dénominateur* ou le second terme.

2. Calcul de la valeur d'un rapport.

1° Soit à calculer la valeur du rapport $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}$. Divisons le numérateur par le dénominateur ; nous obtenons la valeur cherchée qui est :

$$\frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20}.$$

2° Considérons maintenant le rapport $\frac{\frac{3}{5} \times \frac{7}{2}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{3}}$; son numérateur est égal à $\frac{3}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{21}{10}$ et son dénominateur à $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{3}{15} + \frac{5}{15} = \frac{8}{15}$.

Le rapport donné vaut donc :

$$\frac{\frac{21}{10}}{\frac{8}{15}} = \frac{21}{10} \times \frac{15}{8} = \frac{315}{80} = \frac{63}{16}.$$

On vérifie aisément pour le premier exemple que $\frac{5}{7} \times \frac{21}{20} = \frac{3}{4}$ et, pour le second, que $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) \times \frac{63}{16} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{2}$.

Pour calculer la valeur d'un rapport (dont les termes sont constitués par des nombres arithmétiques), on effectue s'il y a lieu les opérations indiquées au numérateur, puis celles indiquées au dénominateur; on divise ensuite le numérateur par le dénominateur.

3. Propriétés du rapport de deux nombres.

Les propriétés des fractions et les règles de calcul correspondantes s'appliquent aux rapports.

*1° **Égalité de deux rapports.*** Deux rapports qui ont des dénominateurs égaux sont égaux si, et seulement si, leurs numérateurs sont égaux.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{b} \iff a = c.$$

2° Multiplication ou division des deux termes d'un rapport par un même nombre, non nul.

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} \qquad \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{n}}{\frac{b}{n}}.$$

Justification (pour la multiplication). — Puisque le rapport $\frac{a}{b}$ est le quotient exact q de a par b :

$$q = \frac{a}{b} \iff a = b \times q.$$

Multiplions par un même nombre m les deux nombres de cette dernière égalité. Nous obtenons encore une égalité :

$$a \times m = b \times q \times m$$

qui peut s'écrire :

$$a \times m = (b \times m) \times q$$

Cette nouvelle égalité montre que :

$$q = \frac{a \times m}{b \times m}.$$

Donc :

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

Applications. — On peut donc réduire plusieurs rapports au même dénominateur. On peut aussi simplifier un rapport.

3° *Produit de deux ou plusieurs rapports.*

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{a \times c \times e}{b \times d \times f}.$$

Cas particuliers :

$$a \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{d}; \qquad \frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}.$$

4° *Puissance* $n^{\text{ième}}$ ***d'un rapport :***

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \qquad \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \times \frac{c^n}{d^n} \times \frac{e^n}{f^n}.$$

5° *Inverse d'un rapport :*

$$\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}.$$

6° *Quotient de deux rapports :*

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

7° *Somme (et différence) de rapports réduits au même dénominateur.*

$$\frac{a}{D} + \frac{b}{D} + \frac{c}{D} = \frac{a+b+c}{D}$$

$$\frac{a}{D} - \frac{b}{D} = \frac{a-b}{D}.$$

Si les rapports donnés ont des dénominateurs différents, on les réduit d'abord au même dénominateur.

4. Rapport de deux grandeurs de même espèce.

Le rapport de deux grandeurs de même espèce est égal au rapport des nombres qui les mesurent, ces mesures étant effectuées avec la même unité (1).

Par exemple, si deux segments A et B mesurent respectivement 20 *cm* et 7 *cm*, le rapport du segment A au segment B est le rapport de 20 à 7, autrement dit le quotient exact de ces deux nombres ; celui-ci s'écrit $\frac{20}{7}$.

---

(1) La démonstration de ce théorème est faite en géométrie en ce qui concerne les segments.

EXERCICES

Calculer les rapports, puis les rapports inverses :

814. De 84 à 12 — de 6 à 42 — de 16 à 16 — de 100 à 0,2.

815. De $\frac{28}{5}$ à $\frac{1}{4}$ — de $\frac{3}{14}$ à $\frac{6}{7}$ — de $\frac{9}{16}$ à 12 — de 0,25 à $\frac{3}{4}$.

816. De $\frac{13}{4}$ à $\frac{169}{16}$ — de 0,01 à 10 000 — de 1 000 à $\frac{1}{5}$ — de 420 à $\frac{7}{3}$.

817. De $\frac{a}{7}$ à $2a$ — de $0{,}01a$ à $\frac{9a}{5}$ — de $12a$ à $\frac{a}{12}$ — de $110a$ à $\frac{a}{11}$.

818. Le classement des équipes de football participant au Championnat de France et possédant le même nombre de points (2 pour un match gagné, 1 pour un match nul et 0 pour un match perdu) se fait en comparant les rapports du nombre de buts marqués par chaque équipe au nombre de buts marqués contre elle par les équipes concurrentes (goal average). Classer les équipes ci-contre d'après les résultats obtenus à une certaine date du Championnat.

	Points	Buts « pour »	Buts « contre »
Rouen.........	38	57	56
Toulouse	38	62	61
Nice..........	38	53	64
Rennes........	38	58	63
Stade français.	38	58	57

819. Calculer la valeur numérique chacun des rapports de suivants pour $x = 5$, $y = 2$:

$$\frac{3x - y}{2x + 4} \qquad \frac{\frac{x}{2} + 1}{3y - 1} \qquad \frac{\frac{2y}{3} + 7}{2x^2 - 7}.$$

820. Dans l'écriture des rapports :

$$\frac{5}{\frac{1}{4}} \qquad \frac{0{,}3}{\frac{2}{5}} \qquad \frac{\frac{3}{7}}{5} \qquad \frac{\frac{4}{9}}{2{,}5},$$

un élève a permuté les deux traits. Comparer les résultats obtenus aux résultats recherchés.

821. Le rapport des masses de deux pièces métalliques est $\frac{7}{15}$. La première pèse 8,5 *kg*. Quel est la masse de la seconde?

822. Un vase de 15 *l* de capacité contient 250 cm^3 d'eau. Quel est le rapport du volume du liquide au volume intérieur du vase?

823. Connaissant le rapport $\frac{10}{27}$ des diamètres de deux cylindres, calculer le rapport de leurs sections.

824. Connaissant le rapport $\frac{25}{49}$ des sections de deux cylindres, calculer le rapport de leurs diamètres.

825. Un train parcourt 260 *km* en 3 *h* 15 *mn*. Un autre train parcourt 250 *km* en 2 *h* 30 *mn*. Trouver le rapport de leurs vitesses moyennes.

826. Que devient l'expression $\frac{a + bk}{k + 1}$ pour : $a = \frac{45}{4}$, $b = \frac{15}{2}$, $k = \frac{3}{5}$?

45. PROPORTIONS

1. Définition. *Une proportion est l'égalité de deux rapports.*

EXEMPLE : $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$ (valeur commune : 0,75).

Les rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ étant égaux, l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ est une proportion qui se lit : a est à b ce que c est à d.

a, b, c, d, constituent, dans cet ordre, le 1er, le 2e, le 3e, le 4e terme de la proportion.

a et d sont les *extrêmes* ; b et c les *moyens*.

2. Propriété fondamentale.

1° Soit la proportion : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Réduisons ces rapports au même dénominateur :

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{d \times b}.$$

L'égalité des dénominateurs entraîne celle des numérateurs :

$$a \times d = c \times b.$$

Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.

2° Soient quatre nombres a, b, c, d, tels que $a \times d = b \times c$ (les nombres b et d étant différents de zéro).

Divisons les deux membres de cette égalité par le produit $b \times d$:

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{b \times c}{b \times d}.$$

Simplifions chacun des rapports :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Si quatre nombres sont tels que le produit de deux d'entre eux est égal au produit des deux autres (et si b *et* d *ne sont pas nuls), ces quatre nombres peuvent être les termes d'une proportion.*

Groupons les deux conclusions :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \times d = b \times c \qquad bd \neq 0.$$

D'où l'énoncé :

Théorème.— Quatre nombres a, b, c, d (rangés dans cet ordre et tels que b et d ne sont pas nuls) forment une proportion si, et seulement si, le produit des nombres a et d est égal au produit des nombres b et c.

3. Transformations simples d'une proportion.

Considérons les quatre nombres a, b, c, d tels que $bd \neq 0$ et que : $a \times d = b \times c$. Dans cette égalité :

1° Permutons les extrêmes a et d :

$d \times a = b \times c$ et écrivons la proportion correspondante : $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.

2° Permutons seulement les moyens b et c :

$a \times d = c \times b$. La proportion correspondante s'écrit : $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

3° Permutons à la fois les extrêmes et les moyens :

$d \times a = c \times b$. La proportion correspondante s'écrit : $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$.

Si quatre nombres forment une proportion, on obtient une autre proportion en permutant soit les extrêmes, soit les moyens, soit à la fois les extrêmes entre eux et les moyens entre eux.

Donc : $ad = bc \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \iff \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

Dans ce dernier cas, la double permutation aboutit à inverser les rapports de la proportion d'origine.

4. Quatrième proportionnelle de trois nombres.

On appelle quatrième proportionnelle de trois nombres a, b, c le quatrième terme d'une proportion dont a, b, c sont, dans l'ordre, les trois premiers.

EXEMPLE. — La quatrième proportionnelle des trois nombres 6, 14, 9 est un nombre x tel que $\frac{6}{14} = \frac{9}{x}$.

En égalant le produit des extrêmes et le produit des moyens, nous obtenons :

$$6 \times x = 14 \times 9, \quad \text{puis :} \quad x = \frac{14 \times 9}{6} = \mathbf{21}.$$

5. Moyenne proportionnelle de deux nombres (ou moyenne géométrique).

Dans une proportion, les moyens peuvent être égaux :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d}.$$

La valeur d'un moyen est alors telle que $b^2 = a \times d$. *On dit que b est la moyenne proportionnelle des deux nombres a et d.*

EXEMPLE. — Calculons la moyenne proportionnelle x de 4 et de 9. Ces deux nombres sont tels que $x^2 = 4 \times 9$, donc que $x^2 = 36$. La moyenne proportionnelle cherchée est donc $x = \sqrt{36}$, c'est-à-dire $x = \mathbf{6}$.

6. Autres transformations d'une proportion.

Considérons la proportion : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. (1)

1° Ajoutons 1 aux deux membres de l'égalité (1). Nous obtenons :

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1,$$

puis, après réduction au même dénominateur dans chaque membre :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d}, \quad \text{et enfin la proportion : } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}. \qquad (2)$$

2° En retranchant 1 aux deux membres de l'égalité (1), nous obtenons de même (en supposant $a > b$, ce qui entraîne $d > c$) :

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1, \qquad \text{puis : } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}. \qquad (3)$$

Si $a < b$, donc $c < d$, nous sommes conduits, en retranchant de 1 chacun des deux membres de l'égalité (1), à la proportion :

$$\frac{b-a}{b} = \frac{d-c}{d}. \qquad (3 \text{ bis})$$

Soit k la valeur de chacun des rapports de la proportion considérée :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k, \quad \text{d'où : } \quad a = bk \quad \text{et} \quad c = dk.$$

Additionnons membre à membre ces deux dernières égalités :

$$a + c = k(b + d) \quad \text{ou} \quad k = \frac{a+c}{b+d}.$$

Retranchons membre à membre ces deux mêmes égalités, en supposant $a > c$, donc $b > d$:

$$a - c = k(b - d) \quad \text{ou} \quad k = \frac{a-c}{b-d}.$$

Égalons les deux rapports ayant pour valeur k :

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \qquad (4)$$

4° En permutant les moyens de chacune des proportions (2), (3), (3 bis), (4), nous obtiendrons encore de nouvelles proportions.

Aussi, à partir d'une proportion, ***on peut obtenir d'autres proportions en combinant de la même manière les termes du premier rapport et ceux du second.***

7. Applications.

1° Trouver deux nombres connaissant leur somme 36 et leur rapport $\frac{2}{7}$.

Ces deux nombres a et b sont tels que $\frac{a}{b} = \frac{2}{7}$.

Appliquons à cette proportion la relation (2) du paragraphe précédent :

$$\frac{a+b}{b}=\frac{2+7}{7}.$$

Remplaçons $a+b$ par sa valeur 36 :

$$\frac{36}{b}=\frac{9}{7} \quad \text{d'où} \quad b=\frac{36\times 7}{9}=\mathbf{28}.$$

$$a=36-28=\mathbf{8}.$$

2° Trouver deux nombres connaissant leur différence 14 et leur rapport $\frac{5}{3}$.

Ces deux nombres a et b sont tels que $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$.

Appliquons à cette proportion la relation (3) du paragraphe précédent :

$$\frac{a-b}{b}=\frac{5-3}{3} \quad \text{d'où :} \quad \frac{14}{b}=\frac{2}{3}$$

$$\text{et} \quad b=\frac{14\times 3}{2}=\mathbf{21}.$$

$$a=21+14=\mathbf{35}.$$

EXERCICES

827. Compléter les proportions suivantes :

$\frac{x}{7}=\frac{24}{14}$ $\quad\frac{15}{4}=\frac{x}{4,4}$ $\quad\frac{3}{x}=\frac{0,75}{14}$ $\quad\frac{5}{3}=\frac{7,5}{x}$ $\quad\frac{4}{x}=\frac{x}{25}$.

828. Calculer la quatrième proportionnelle des nombres suivants :

7 ; 15 ; 12. $\quad$ 8 ; $\frac{9}{10}$; 0,5. $\quad$ 15 ; 7 ; 12. $\quad$ 5,7 ; 9,6 ; 6,27.

829. Dire si les nombres rangés ci-après forment une proportion. Sinon, les ranger dans l'ordre nécessaire. Écrire ensuite la proportion :

a) 2 $\quad$ 3 $\quad$ 30 $\quad$ 45

b) 5 $\quad$ 72 $\quad$ 6 $\quad$ 60

c) 4 $\quad$ 2,5 $\quad$ 5 $\quad$ 8

d) $\frac{14}{15}$ $\quad\frac{1}{6}$ $\quad\frac{49}{15}$ $\quad\frac{7}{12}$.

830. 1° Calculer la moyenne proportionnelle des nombres suivants :

9 et 4 $\quad$ 0,3 et 2,7 $\quad$ $\frac{5}{7}$ et $\frac{7}{5}$ $\quad$ 8 et 18.

2° Calculer la quatrième proportionnelle aux nombres suivants : $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{7}{15}$.

831. Démontrer que la moyenne arithmétique de deux nombres est supérieure à leur moyenne proportionnelle.

832. Les nombres rangés a, b, c, d formant une proportion, les nombres a, b, $5c$, $5d$ forment-ils aussi une proportion? En est-il de même des nombres :

$3a$ $\quad b$ $\quad 3c$ $\quad d$.

$\frac{a}{2}$ $\quad b$ $\quad c$ $\quad\frac{d}{2}$.

a $\quad b$ $\quad c^2$ $\quad d^2$.

a^2 $\quad b^2$ $\quad c^2$ $\quad d^2$?

338. Montrer que la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entraîne les proportions suivantes :

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{ac}{bd}. \qquad \frac{5a + 3c}{5b + 3d} = \frac{7a + 2c}{7b + 2d}.$$

$$\frac{ac}{bd} = \frac{(a + c)^2}{(b + d)^2}. \qquad \frac{7a - 2c}{7b - 2d} = \frac{4a - c}{4b - d}.$$

834. Prouver que : $\frac{14}{99} = \frac{1\,414}{9\,999} = \frac{141\,414}{999\,999}$

835. Trouver deux nombres connaissant leur somme 66 et leur rapport 4/7.

836. Trouver deux nombres connaissant leur somme 93 et leur rapport $\frac{2/5}{3/4}$.

837. Trouver deux nombres connaissant leur produit 600 et leur rapport 3/8.

838. Étant donné la valeur k du rapport $\frac{a - b}{a + b}$, trouver la valeur k' du rapport $\frac{a}{b}$.

839. Les longueurs de deux pièces d'étoffe sont dans le rapport de 12 à 7 et la première mesure 10 *m* de plus que la seconde. Calculer les longueurs de ces deux pièces.

840. Deux nombres x et y satisfont à la relation $x \times 126 = y \times 60$.

1° Calculer le rapport de x à y en lui donnant sa forme la plus simple.

2° Calculer x et y dans les trois cas suivants : la somme des deux nombres est 279 ; la différence des deux nombres est 99 ; le produit des deux nombres est 1 890.

841. Trouver deux nombres x et y proportionnels à 7 et à 3 sachant qu'il existe entre eux la relation : $5x - 3y = 104$.

842. Calculer deux nombres connaissant leur rapport 4/5 et la somme de leurs carrés 656.

843. Calculer deux nombres connaissant leur rapport 7/4 et la différence de leurs carrés 825.

844. Deux nombres vérifient la relation $7x = 4y$. Calculer $\frac{x}{y}$.

Trouver x et y :

1° lorsque leur somme est 121 ;

2° lorsque leur différence est 57 ;

3° lorsque leur produit est 252.

845. Soit la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Démontrer que $\frac{5a + 3c}{5b + 3d} = \frac{8a + 13c}{8b + 13d}$.

Y a-t-il une réciproque ?

846. Soit la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Démontrer que $\frac{5a + 3c}{5b + 3d} = \frac{ax + cy}{bx + dy}$.

La réciproque est-elle exacte quels que soient x et y ?

847. Quel nombre x faut-il ajouter aux deux termes du rapport $\frac{3}{8}$ pour obtenir un rapport égal à $\frac{2}{3}$?

848. Le rapport de deux nombres x et y est égal à $\frac{3}{8}$. On augmente chacun d'eux de 50. Le nouveau rapport est alors égal à $\frac{7}{17}$. Trouver x et y.

46. SUITE DE RAPPORTS ÉGAUX NOMBRES PROPORTIONNELS

1. Suite de rapports égaux.

Soit la suite de nombres 6; 9; 13,5; 21. Multiplions chacun de ces nombres par $\frac{4}{3}$.
Nous obtenons une nouvelle suite : 8, 12, 18, 28.

Écrivons le rapport de chaque nombre de la première suite au nombre de même rang de la seconde suite :

$$\frac{6}{8} \qquad \frac{9}{12} \qquad \frac{13,5}{18} \qquad \frac{21}{28}.$$

Chacun de ces rapports ayant pour valeur $\frac{3}{4}$, nous pouvons écrire *la suite de rapports égaux* :

$$\frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{13,5}{18} = \frac{21}{28}.$$

2. Propriétés des suites de rapports égaux.

1° Écrivons la suite de rapports égaux :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

k étant leur valeur commune.

a) Multiplions par m les numérateurs de chacun des rapports et le nombre k. Les égalités subsistent et :

$$\frac{a \times m}{a'} = \frac{b \times m}{a'} = \frac{c \times m}{c'} = k \times m.$$

Elles peuvent d'ailleurs s'écrire :

$$\frac{a}{\frac{a'}{m}} = \frac{b}{\frac{b'}{m}} = \frac{c}{\frac{c'}{m}} = k \times m.$$

Étant donné une suite de rapports égaux, on obtient d'autres suites de rapports égaux en multipliant seulement les numérateurs (ou en divisant seulement les dénominateurs) par un même nombre.

b) Divisons par m les numérateurs de chacun des rapports considérés et le nombre k. Les égalités subsistent encore et :

$$\frac{\frac{a}{m}}{a'} = \frac{\frac{b}{m}}{b'} = \frac{\frac{c}{m}}{c'} = \frac{k}{m}.$$

Ces égalités peuvent s'écrire :

$$\frac{a}{a' \times m} = \frac{b}{b' \times m} = \frac{c}{c' \times m} = \frac{k}{m}.$$

Etant donné une suite de rapports égaux, on obtient d'autres suites de rapports égaux en divisant seulement les numérateurs (ou en multipliant seulement les dénominateurs) par un même nombre.

c) APPLICATION. — Soit la suite :

$$\frac{x}{\frac{7}{2}} = \frac{y}{\frac{5}{3}} = \frac{z}{\frac{2}{5}}$$

Multiplions les dénominateurs par 30 (30 est le p. p. c. m. des dénominateurs 2, 3 et 5). Nous obtenons la nouvelle suite :

$$\frac{x}{\frac{7}{2} \times 30} = \frac{y}{\frac{5}{3} \times 30} = \frac{z}{\frac{2}{5} \times 30} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{105} = \frac{y}{50} = \frac{z}{12}.$$

2° Considérons les rapports égaux suivants :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k.$$

D'après la définition des rapports :

$$a = a' \times k \qquad b = b' \times k \qquad c = c' \times k.$$

Ajoutons membre à membre ces trois égalités :

$$a + b + c = a' \times k + b' \times k + c' \times k.$$

Mettons k en facteur commun dans le second membre :

$$a + b + c = (a' + b' + c') \times k.$$

$$k = \frac{a + b + c}{a' + b' + c'}.$$

Nous pouvons donc écrire que :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a + b + c}{a' + b' + c'}.$$

Étant donné une suite de rapports égaux, on forme un rapport égal à chacun deux en prenant pour numérateur la somme des numérateurs et pour dénominateur la somme des dénominateurs.

3. Nombres d'une suite proportionnels à d'autres nombres d'une autre suite.

Considérons les suites de nombres a, b, c... et a', b', c'.

Les nombres de la première suite sont dits proportionnels à ceux de la seconde si les rapports des nombres de même rang des deux suites sont égaux.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}. \qquad (1)$$

Le nombre k, valeur commune des rapports, est appelé ***coefficient de proportionnalité.*** Dans l'exemple du paragraphe 1, le coefficient de proportionnalité est $\frac{3}{4}$ $\left(\text{en effet} : \frac{6}{8} = \frac{3}{4}\right)$.

De l'égalité $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$, nous déduisons les relations :

$$a = a' \times k \qquad b = b' \times k \qquad c = c' \times k.$$

$$a' = a \times \frac{1}{k} \qquad b' = b \times \frac{1}{k} \qquad c' = c \times \frac{1}{k}.$$

Avec deux suites de nombres proportionnels, on peut écrire deux suites de rapports égaux dont les coefficients de proportionnalité sont inverses l'un des l'autre :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \qquad \text{et} \qquad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{1}{k}.$$

4. Application : partages proportionnels.

PROBLÈME. — *Partager une somme de 1 121 F en parties directement proportionnelles aux nombres 21, 8, 30.*

PREMIÈRE SOLUTION. — Soient x, y, z, les trois parts exprimées en francs. Nous avons :

$$\frac{x}{21} = \frac{y}{8} = \frac{z}{30} \qquad \text{et} \qquad x + y + z = 1\,121.$$

Chacun de ces rapports est égal au rapport formé par la somme des numérateurs et la somme des dénominateurs :

$$\frac{x}{21} = \frac{y}{8} = \frac{z}{30} = \frac{x + y + z}{21 + 8 + 30} = \frac{1\,121}{59} = 19.$$

$$\frac{x}{21} = 19, \text{ d'où } x = 19 \times 21 = \mathbf{399\ F}.$$

$$\frac{y}{8} = 19, \text{ d'où } y = 19 \times 8 = \mathbf{152\ F}.$$

$$\frac{z}{30} = 19, \text{ d'où } z = 19 \times 30 = \mathbf{570\ F}.$$

Vérification : 1 121 F.

GÉNÉRALISATION. — Pour partager un nombre N en parties proportionnelles aux nombres a, b, c, on applique les formules :

$$x = \frac{N}{a + b + c} \times a \qquad y = \frac{N}{a + b + c} \times b \qquad z = \frac{N}{a + b + c} \times c.$$

SECONDE SOLUTION. — Soit k le coefficient de proportionnalité. Les trois parts valent respectivement $21\,k$, $8\,k$, $30\,k$. Comme $21\,k + 8\,k + 30\,k = 1\,121$, on en déduit que $k = 19$.

La première part est : 19 F × 21 = ***399 F***; la seconde : 19 F × 8 = ***152 F***; la troisième : 19 F × 30 = ***570 F***.

REMARQUE. — Si l'on a à partager 1 121 F en parties proportionnelles à 3,5 ; $\frac{4}{3}$; 5, *on réduit d'abord ces trois nombres au même dénominateur.*.

Les nombres $\frac{7}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{1}$ s'écrivent alors $\frac{21}{6}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{30}{6}$.

Il est clair qu'en remplaçant $\frac{21}{6}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{30}{6}$ par 21, 8, 30 dans les formules précédentes, les valeurs de x, y, z ne sont pas changées. On est alors ramené au problème précédemment étudié.

5. Nombres d'une suite inversement proportionnels à d'autres nombres d'une autre suite.

Considérons les deux suites de nombres a, b, c et a', b', c'. ***Les nombres de la première suite sont dits inversement proportionnels à ceux de la seconde suite s'ils sont proportionnels aux inverses des nombres de cette seconde suite :***

$$\frac{a}{\frac{1}{a'}} = \frac{b}{\frac{1}{b'}} = \frac{c}{\frac{1}{c'}}$$

Ces égalités peuvent s'écrire :

$$a \times a' = b \times b' = c \times c'.$$

Réciproquement, étant donné les égalités ci-dessus, on peut écrire les égalités ci-contre.

Les nombres d'une suite sont inversement proportionnels à ceux d'une autre suite si, et seulement si, les produits des nombres de même rang de chacune des suites sont égaux.

EXEMPLE. — Les nombres des deux suites : **90 60 36 15**
2 3 5 12

sont inversement proportionnels parce que :

$$90 \times 2 = 60 \times 3 = 36 \times 5 = 15 \times 12 = 180.$$

REMARQUE. — La proportionnalité inverse se ramène à la proportionnalité directe. Parce que x, y, z sont, par exemple, inversement proportionnels à 2, 5, 7, ils sont proportionnels à $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$, donc à $\frac{35}{70}, \frac{14}{70}, \frac{10}{70}$, ou encore à 35, 14 et 10.

6. Application : partages inversement proportionnels.

PROBLÈME. — *Une propriété de 18 370 m² est divisée en trois lots dont les surfaces sont respectivement en raison inverse des nombres 5, 7, 11. Calculer la surface de chaque lot.*

SOLUTION. — Les surfaces des trois lots sont inversement proportionnelles à 5, 7, 11. Elles sont donc *directement proportionnelles aux inverses de ces nombres* :

$$\frac{1}{5} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{11}.$$

Or ces trois nombres peuvent être successivement remplacés par :

$$\frac{77}{385} \quad \frac{55}{385} \quad \frac{35}{385} \quad \text{ou par} \quad 77,\ 55,\ 35.$$

Le premier lot mesure : $\frac{18\,370 \text{ m}^2 \times 77}{77 + 55 + 35} = \frac{18\,370 \text{ m}^2 \times 77}{167} = 110 \text{ m}^2 \times 77 = \mathbf{8\,470 \text{ m}^2}.$

Le second lot mesure : $\frac{18\,370 \text{ m}^2 \times 55}{77 + 55 + 35} = \frac{18\,370 \text{ m}^2 \times 55}{167} = 110 \text{ m}^2 \times 55 = \mathbf{6\,050 \text{ m}^2}.$

Le troisième lot mesure : $\frac{18\,370 \text{ m}^2 \times 35}{77 + 55 + 35} = \frac{18\,370 \text{ m}^2 \times 35}{167} = 110 \text{ m}^2 \times 35 = \mathbf{3\,850 \text{ m}^2}.$

Vérification : 18 370 m².

EXERCICES

Les suites de nombres rangés ci-après sont-elles proportionnelles?

849. 5 15 35 et 2 6 14.

850. 8 32 56 et 7 28 50.

851. $2a$ $9a$ $11a$ et 4 18 22 (a n'étant pas nul).

Calculer les nombres a et b tels que :

852. a 14 18 soient proportionnels à 14 49 b.

853. 1 a 15 soient proportionnels à $\frac{9}{5}$ 9 b.

854. 24 56 a soient proportionnels à b 21 $\frac{1}{2}$.

855. Montrer que : $\frac{17}{23} = \frac{1717}{2323} = \frac{171717}{232323}$.

856. Montrer que : $\frac{11}{29} = \frac{1122}{2958} = \frac{112233}{295887}$.

857. Les nombres de la deuxième suite sont proportionnels aux nombres de la première suite. Écrire les nombres manquants :

5	7	1	...	...	25	..
1,5	...	...	0,6	$\frac{3}{20}$	...	24

858. Même exercice avec :

15	..	$\frac{2}{7}$	..	144	..	0,32
60	84	..	6,4	..	$\frac{16}{3}$	..

● Dans les trois exercices suivants, les nombres rangés de la première suite sont-ils inversement proportionnels aux nombres rangés de la seconde?

859. 6 4 3 et 8 12 15.

860. 5 7 4 et 28 20 35.

861. 3 4 5 et 60 45 36.

Calculer les nombres a et b tels que :

862. a 5 12 soient inversement proportionnels à 30 b 10.

863. 2 a 36 soient inversement proportionnels à b 3 $\frac{2}{3}$.

864. a 5 b soient inversement proportionnels à 10 6 7,5.

865. Les nombres de la deuxième suite sont inversement proportionnels à ceux de la première. Écrire les nombres manquants :

4	..	8	25	..	..	12,5
30	20	..	..	60	16	..

866. Même exercice avec :

2	..	5	..	$\frac{3}{4}$	..	7,5
5	7,5	..	$\frac{2}{3}$	..	1	..

867. Partager 600 en parties proportionnelles à 7, 3, 2.

868. Quels sont les nombres proportionnels aux nombres 2, 5, 9 dont la somme est 336?

869. Partager 390 en parties proportionnelles à $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.

870. Partager 13 699 proportionnellement aux nombres $\frac{11}{3}$, $\frac{53}{6}$, $\frac{23}{4}$, $\frac{47}{12}$.

871. Quatre cultivateurs achètent en commun un tracteur qui leur revient à 19 200 F. Leurs parts de dépenses sont proportionnelles aux surfaces labourables de leurs propriétés qui sont : 22 *ha*, 28 *ha*, 36 *ha*, 42 *ha*. Calculer ces parts.

872. Une moissonneuse-batteuse est utilisée par cinq paysans qui se partagent les dépenses communes proportionnellement aux nombres d'heures de travail de la machine effectuées pour le compte de chacun : 25 *h* 1/4, 28 *h* 3/4, 31 *h* 1/2, 34 *h* 1/2. Partager une dépense globale de 2 400 F.

873* (1). Les côtés *a*, *b*, *c* d'un triangle ABC sont proportionnels aux nombres 7, 5, 4. Le périmètre du triangle est 32 *cm*. Calculer les côtés de ce triangle.

874*. Trouver trois nombres x, y, z proportionnels à 2, 5, 3 sachant que $4x - y + 2z = 780$.

875*. Trois nombres sont proportionnels à 5, 6, 7. Si l'on double le premier et si l'on triple le second, les trois nombres ont pour somme 70. Calculer ces trois nombres.

876. Deux frères, André et Paul, se partagent un sac de billes de façon que le nombre de billes qu'ils reçoivent soit proportionnel à 3 et à 5.

1° Combien chacun d'eux reçoit-il de billes s'il y en a 80 dans le sac?

2° André reçoit 8 billes de moins que Paul. Combien y a-t-il de billes dans le sac et quelle est la part de chacun?

3° Combien André reçoit-il de billes si la somme des carrés des nombres représentant chaque part est égale à 306?

877*. 1° Une somme de 1 000 F se compose d'un certain nombre de billets de 100 F, de 50 F et de 10 F. Le nombre total des billets est 17. Sachant qu'il y a autant de billets de 50 F que de billets de 10 F, déterminer le nombre de billets de chaque sorte.

2° Le problème est-il possible en supposant qu'il y ait autant de billets de 50 F que de billets de 100 F. ?

3° Déterminer le montant d'une autre somme, sachant qu'elle renferme 48 billets et que les nombres de billets de 100 F, 50 F et 10 F sont respectivement proportionnels aux nombres 3, 4, 5. Le problème est-il possible si l'on suppose qu'il y a au total 44 billets?

878*. Deux nombres dont la somme est 220 sont proportionnels à 3 et 2,5. Calculer ces deux nombres.

Si la somme est S, calculer les deux nombres en fonction de S et dites quelles sont les valeurs possibles de S pour que ces deux nombres soient compris entre 30 et 84.

879. Partager 279 en parties inversement proportionnelles à 2, 3, 5.

880. Partager 714 en parties inversement proportionnelles à $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{10}{7}$.

881. Quels sont les nombres inversement proportionnels aux nombres $\frac{5}{2}$, 3, 5 et dont la somme est 266?

882. Une propriété de 94 *ha* est formée de trois lots dont les surfaces sont inversement proportionnelles à 3, 4, 5. Calculer la surface de chaque lot. Les lots sont égaux en valeur et le prix du mètre carré du lot dont le terrain est le moins bon est de 1,80 F. Calculer la valeur totale de la propriété.

883. Une gratification de 235 F est partagée entre trois employés en raison inverse de leurs appointements mensuels qui sont 600 F, 800 F, 1 000 F. Trouver la part de chacun.

---

(1) Les exercices marqués du signe* sont des exercices d'examen (B. E. P. C. en général).

47. GRANDEURS PROPORTIONNELLES

A. GRANDEURS DIRECTEMENT PROPORTIONNELLES

1. Définition.

EXEMPLE. — *Un piéton qui marche sur une route note toutes les heures la distance qu'il a parcourue à partir de son point de départ.*

Supposons que cette distance soit, après 1 *h* de marche, de 5 *km*, après 2 *h*, de 10 *km*, après 3 *h*, de 15 *km*, après 4 *h*, de 20 *km*. Les nombres qui mesurent les distances sont proportionnels aux nombres qui mesurent les temps, puisque :

$$\frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \frac{20}{4}.$$

On dit que la *distance parcourue* est, dans le cas considéré, *proportionnelle au temps employé à la parcourir*.

Deux grandeurs sont directement proportionnelles lorsque les diverses valeurs de l'une sont proportionnelles aux valeurs correspondantes de l'autre.

Les valeurs de l'une de ces grandeurs et les valeurs correspondantes de l'autre forment deux suites de nombres proportionnels. On sait que le coefficient de proportionnalité est un nombre constant, égal dans l'exemple précédent à 5.

2. Propriétés des grandeurs proportionnelles.

1° Reprenons ce même exemple. Considérons deux valeurs (*en kilomètres*) de la distance parcourue, 10 et 20 par exemple, et les deux valeurs correspondantes (*en heures*) du temps.

D'après la définition :

$$\frac{10}{2} = \frac{20}{4}. \qquad (1)$$

Dans cette proportion, permutons les moyens :

$$\frac{10}{20} = \frac{2}{4}. \qquad (2)$$

Lorsque deux grandeurs sont directement proportionnelles, le rapport de deux valeurs quelconques de l'une est égal au rapport des valeurs correspondantes de l'autre.

2° Cette propriété peut s'énoncer sous une autre forme : la proportion (2) montre, en effet, que, si le temps devient deux fois plus grand, la distance parcourue devient aussi deux fois plus grande.

Lorsque deux grandeurs sont directement proportionnelles, si l'une devient 2, 3, ... fois plus grande (ou plus petite), l'autre devient aussi 2, 3, ... fois plus grande ou plus petite.

3. Problèmes se ramenant au calcul du quatrième terme d'une proportion.

EXEMPLE. — *Pour 42 postes de télévision d'un type donné, il est indiqué dans une facture un prix brut de 63 000 F. Pour 50 postes de même type, quel sera le prix brut ?*

Les prix bruts étant directement proportionnels aux quantités :

$$\frac{63\,000}{x} = \frac{42}{50} \quad \text{d'où} \quad x = \frac{63\,000 \times 50}{42} = \mathbf{\mathit{75000\ F.}}$$

B. GRANDEURS INVERSEMENT PROPORTIONNELLES

4. Définition.

EXEMPLE. — *Avec une somme de 800 F, un commerçant à qui l'on offre des lainages à 16 F, à 20 F, à 25 F le mètre, peut acheter 50 m du premier, 40 m du second, 32 m du troisième.*

Les nombres qui mesurent les longueurs des lainages sont inversement proportionnels à ceux qui mesurent les prix unitaires correspondants :

$$\frac{50}{\frac{1}{16}} = \frac{40}{\frac{1}{20}} = \frac{32}{\frac{1}{25}}.$$

On dit que *les longueurs des lainages* (que l'on peut acheter avec une somme donnée) *sont inversement proportionnels aux prix unitaires correspondants.*

Deux grandeurs sont inversement proportionnelles lorsque les diverses valeurs de l'une sont proportionnelles aux inverses des valeurs correspondantes de l'autre.

Les valeurs de l'une de ces grandeurs et les inverses des valeurs de l'autre forment ainsi deux suites de nombres proportionnels.

Le produit d'une valeur quelconque de l'une des grandeurs par la valeur correspondante de l'autre grandeur est un nombre constant.

Dans l'exemple considéré, il est égal à 800.

5. Propriétés des grandeurs inversement proportionnelles.

1° Considérons, dans le même exemple, la proportion :

$$\frac{40}{\frac{1}{20}} = \frac{32}{\frac{1}{25}} \quad (1)$$

Permutons les moyens : $\frac{40}{32} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{25}}$.

Effectuons le quotient de $\frac{1}{20}$ par $\frac{1}{25}$. Nous obtenons la proportion :

Longueur du 2[e] lainage → $\frac{40}{32} = \frac{25}{20}$ ← Prix unitaire du 3[e] lainage.
Longueur du 3[e] lainage → ← Prix unitaire du 2[e] lainage.

Lorsque deux grandeurs sont inversement proportionnelles, le rapport de deux valeurs quelconques de l'une est égal au rapport inverse des deux valeurs correspondantes de l'autre.

2° Si le prix unitaire devient deux fois plus élevé, la longueur que l'on peut acheter avec la même somme devient deux fois plus petite.

Lorsque deux grandeurs sont inversement proportionnelles, si l'une devient 2, 3... fois plus grande (ou plus petite), l'autre devient 2, 3... fois plus petite (ou plus grande).

6. Problèmes se ramenant au calcul du quatrième terme d'une proportion.

EXEMPLE. — *Un automobiliste allait de Biarritz à Talence (faubourg de Bordeaux) en 3* h, *à la vitesse moyenne de 60* km *à l'heure. Il dispose maintenant d'une voiture capable de réaliser une vitesse horaire moyenne de 80* km. *Quel temps mettra-t-il pour effectuer le trajet ?*

Les temps de parcours étant inversement proportionnels aux vitesses horaires correspondantes :

$$\frac{60}{80} = \frac{x}{3} \quad \text{d'où} \quad x = \frac{60 \times 3}{80} = \frac{9}{4} \text{ d'heure (ou } \mathbf{\textit{2 h 15 mn}}\text{).}$$

C. GRANDEURS PROPORTIONNELLES A PLUSIEURS AUTRES

7. Une grandeur peut être proportionnelle à plusieurs autres.

EXEMPLE 1. — *Le volume d'un parallélépipède rectangle dépend à la fois de sa longueur, de sa largeur, de sa hauteur. Il est proportionnel à sa longueur, à sa largeur, à sa hauteur.*

Soient L, l, h les dimensions d'un parallélépipède rectangle ; son volume est :

$$V = L \times l \times h.$$

Faisons varier les trois dimensions ; soient L′, l′, h' les nouvelles dimensions ; le volume du nouveau parallélépipède est : $V' = L' \times l' \times h'$.

Le rapport des volumes s'écrit :

$$\frac{V'}{V} = \frac{L' \times l' \times h'}{L \times l \times h} \quad \text{ou} \quad \frac{V'}{V} = \frac{L'}{L} \times \frac{l'}{l} \times \frac{h'}{h}.$$

Le rapport des volumes de deux parallélépipèdes rectangles est égal au produit du rapport direct des longueurs par le rapport direct des largeurs, par le rapport direct des hauteurs.

Plus généralement, lorsqu'une grandeur A est directement proportionnelle à plusieurs autres B, C, D..., les valeurs de A sont proportionnelles aux produits des valeurs correspondantes de B, C, D...

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \times \frac{c'}{c} \times \frac{d'}{d} \cdots$$

EXEMPLE 2. — ***Une grandeur A peut être directement proportionnelle à certaines grandeurs B, C..., et inversement proportionnelle à d'autres E, F...***

Ainsi le temps mis pour creuser un fossé (à section constante) est directement proportionnel à la longueur du fossé, inversement proportionnel au nombre d'ouvriers, inversement proportionnel à la durée du travail journalier.

S'il faut j jours pour faire creuser un fossé de l mètres de long par n ouvriers travaillant h heures par jour, et x jours pour faire creuser un fossé (de même section) de l' mètres de long par n' ouvriers travaillant h' heures par jour, le rapport des temps est :

$$\frac{x}{j} = \frac{l'}{l} \times \frac{n}{n'} \times \frac{h}{h'}.$$

Rapport des temps (en jours) = rapport direct des longueurs × rapport inverse des nombres d'ouvriers × rapport inverse des nombres d'heures de travail journalier.

D'une manière générale, si une grandeur A est directement proportionnelle aux grandeurs B, C, et inversement proportionnelle aux grandeurs E, F, on a :

Rapport direct de 2 valeurs *de A*	=	Rapport direct des 2 val. corresp. *de B*	×	Rapport direct des 2 val. corresp. *de C*	×	Rapport inverse des 2 val. corresp. *de E*	×	Rapport inverse des 2 val. corresp. *de F*

8. Application.

Deux parallélépipèdes sont le premier en cuivre (densité 9) et le second en étain (densité 7,2). On sait que le premier, qui a 20 cm de longueur, pèse le double du second; que le rapport de la largeur du premier à celle du second est 8/5 ; que le rapport de la hauteur du premier à celle du second est 4/5. Trouver la longueur du second parallélépipède.

SOLUTION. — Les longueurs sont directement proportionnelles aux poids, inversement proportionnelles à la fois aux largeurs, aux hauteurs, aux densités.

Si x est la longueur cherchée (en *cm*) :

$$\frac{20}{x} = \frac{2}{1} \times \frac{5}{8} \times \frac{5}{4} \times \frac{7,2}{9}$$

$$\frac{20}{x} = \frac{5}{4}.$$

On déduit de cette proportion : $x = \frac{20 \times 4}{5} = 16$ *cm.*

EXERCICES

884. Un commerçant établit ses prix de vente de manière qu'ils soient directement proportionnels aux prix d'achat correspondants. Ainsi une marchandise achetée 3 F le kilogramme était revendue 3,90 F. Le prix d'achat de cette marchandise augmente et devient 4 F le kilogramme. Quel doit être alors le prix de vente?

885. Un voyageur a, pour un voyage en autobus de 30 *km*, payé 3,60 F. Sur la même ligne, combien aurait-il payé pour un trajet de 38 *km*?

886. Un train va de A vers B à la vitesse moyenne de 90 *km* à l'heure ; un autre train, qui va de B vers A, part à la même heure que le premier, roule à la vitesse moyenne de 70 *km* à l'heure. Quel est le rapport des distances parcourues par ces trains au moment où ils se croisent? La distance de A à B étant de 320 *km*, au bout de combien de temps les deux trains se croisent-ils?

887. Deux cyclomotoristes effectuent le trajet AB en sens inverse l'un de l'autre. Le premier, qui part de A, circule à une vitesse de 40 *km* à l'heure. Le second, qui part de B, effectue le parcours à la vitesse de 36 *km* à l'heure. Les deux cyclomotoristes partent en même temps. Lorsqu'ils se croisent, le premier a parcouru 5 *km* de plus que le second. Trouver les distances du point de croisement à B et à A.

888. Deux pièces d'étoffe sont payées 1 992 F. Leurs longueurs sont dans le rapport de 12 à 7 et la première pièce mesure 30 *m* de plus que la seconde. Trouver les longueurs de ces deux pièces. Le prix du mètre de la première étant 16 F, calculer le prix du mètre de la seconde.

889. Un bateau fait sur un fleuve le service entre deux localités M et N, la localité B étant située à 25,2 *km* en aval de A. La vitesse du courant est 3 *km* à l'heure et la vitesse du bateau en est augmentée ou diminuée selon qu'il descend ou remonte le courant. La durée du trajet de A à B est les $\frac{3}{4}$ de celle de B à A.

1° Calculer la vitesse horaire du bateau à la descente, puis à la montée. En déduire sa vitesse horaire propre.

2° Calculer le retard dû au courant sur le trajet aller et retour par rapport au même voyage en eau calme.

890. Une société à responsabilité limitée a son capital divisé en parts de 500 F. Le premier associé a 1 100 parts et le second 900 parts. La répartition du bénéfice annuel est ainsi faite : 5 % de ce bénéfice sont mis en réserve, chaque associé reçoit ensuite 12 500 F pour la rémunération de son travail et le reste est partagé proportionnellement aux nombres de parts. Quelle somme revient à chaque associé quand le bénéfice de l'année est 60 000 F ?

891. Pour mettre en sacs un stock de charbon, 5 ouvriers mettent 20 *j*. Combien mettraient 4 ouvriers ? 10 ouvriers ?

892. Deux personnes échangent du vin pour une somme égale. La première remet à la seconde 54 *l* au prix de 1,26 F le litre. La seconde remet à la première du vin à 1,44 F le litre. Combien de litres seront ainsi cédés par la seconde ?

893. Pour exécuter une commande, un industriel doit utiliser 6 machines du même type pendant 20 *j*. Le client lui demande de livrer la commande en 15 *j*. Combien de machines en supplément, mais de même type, devront être mises en marche ?

894. Un cyclomotoriste part de A vers B à la vitesse de 45 *km/h* ; arrivé en B, il repart immédiatement pour A à la vitesse moyenne de 36 *km/h*.

Il met en tout 72 *mn* pour faire le trajet aller et retour.

Calculer les temps consacrés à l'aller, puis au retour. Quelle est la distance AB ?

895. On sait que lorsque des capitaux placés au même taux pendant des temps différents rapportent le même intérêt, ces capitaux sont inversement proportionnels aux temps de placement. Trouver trois capitaux dont la somme est 64 900 F, sachant que, placés au même taux, le premier pendant 2 mois, le second pendant 5 mois, le troisième pendant 7 mois, ils ont produit le même intérêt.

896. Une gratification peut être partagée entre trois collaborateurs d'un chef d'entreprise :

— soit en raison inverse de leurs appointements fixes mensuels : 2 100 F, 2 400 F, 2 800 F ;

— soit en raison inverse de leurs dernières primes mensuelles : 120 F, 140 F, 150 F.

Le collaborateur le moins bien rémunéré reçoit dans le second système 90 F de plus que dans le premier. Quel est le montant de la gratification ?

Déterminer la part de la gratification allant à chaque collaborateur dans le premier système.

897*. Une personne se propose de partager sa fortune entre trois héritiers A, B, C :

a) soit proportionnellement aux nombres 7, 6, 5 ;

b) soit proportionnellement aux nombres 6, 5, 4.

1° Comparer les parts obtenues dans A, B et C dans chacun des partages.

2° Un des héritiers se trouve avoir 1 500 F de plus dans le deuxième partage que dans le premier. Calculer la valeur de l'héritage et la valeur des parts dans le deuxième partage.

3° Comment aurait dû s'effectuer le partage pour que le moins favorisé des héritiers reçoive 30 000 F, la part de B ne changeant pas ?

898*. Quatre joueurs A, B, C, D possèdent avant de jouer ensemble des sommes x, y, z, u respectivement proportionnelles aux nombres 2, 3, 4, 5.

1° Après le jeu, les avoirs des quatre joueurs sont respectivement X, Y, Z, U et ces nombres sont proportionnels aux nombres 8, 9, 11, 14. Indiquer quels sont les joueurs gagnants et les joueurs perdants.

2° L'un des joueurs gagne 20 F. Quel est l'avoir de chacun des joueurs avant et après le jeu ?

48. POURCENTAGES ET BÉNÉFICES

A. POURCENTAGES

1. Tant pour cent et pourcentage.

Le coefficient de proportionnalité de deux grandeurs proportionnelles, étant le *rapport constant* d'une mesure de la première à la mesure correspondante de la seconde, peut être exprimé sous la forme d'un quotient exact.

Mais il est commode d'écrire, quand c'est possible, ce quotient exact sous la forme d'une fraction décimale ayant 100 pour dénominateur. Ainsi :

au lieu de $k = \frac{1}{20}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{27}{125}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{a}{b}$,

on écrit $k = \frac{5}{100}$ (ou 5%) $\frac{20}{100}$ (ou 20%) $\frac{21,6}{100}$ (ou 21,6%) $\frac{25}{100}$ (ou 25%) $\frac{\frac{100\,a}{b}}{100}$.

et on lit : cinq pour cent, vingt pour cent, etc...

Le coefficient de proportionnalité k est ainsi indiqué sous la forme d'un tant pour cent ou d'un pourcentage.

La transformation d'une fraction ordinaire ou d'un rapport en fraction décimale n'est toutefois pas toujours possible (36e leçon, § 3, p. 151).

Dans les calculs commerciaux, on peut alors prendre pour numérateur de la fraction décimale un nombre approché (par exemple 33,33 au lieu de 1/3 × 100) si l'on pense que l'approximation n'entraînera pas des erreurs — en particulier de prix — qui soient sensibles. Mais si l'on désire obtenir un résultat rigoureusement exact, il faut utiliser dans les calculs le quotient exact (1/3 dans l'exemple choisi).

On exprime couramment en ***« tant pour cent »***, ou ***pourcentages***, les rapports suivants : teneur en produit pur d'une composition chimique, quantité d'un produit entrant dans un mélange, commission (ou courtage) due à un intermédiaire du commerce et calculée sur le montant des affaires traitées, remises consenties aux clients sur le prix de vente, impôts calculés sur le chiffre d'affaires d'un commerçant, bénéfice réalisé sur le prix d'achat (ou sur le prix de vente).

Parfois le coefficient de proportionnalité est exprimé en ***tant pour mille***. Ainsi, le montant du courtage prélevé par un agent de change sur le produit de la négociation d'actions en Bourse est de 7 ‰.

2. Problèmes simples sur les pourcentages.

1° Application du pourcentage. — *Un courtier reçoit sur le montant des affaires qu'il traite une commision de 6 %. Quel est le montant de la commission pour un chiffre d'affaires de 2 500 F ?*

SOLUTION. — Le montant de la commission est : $2\,500\ \text{F} \times \frac{6}{100} =$ ***150 F.***

*2° **Calcul du pourcentage.*** — *Une vendeuse a reçu en prime (ou guelte) une somme de 1,75 F pour une vente de 140 F. La guelte étant proportionnelle au montant de la vente, calculer son taux (taux = pourcentage).*

SOLUTION. — Si x est le pourcentage, on peut écrire la proportion $\frac{x}{100} = \frac{1,75}{140}$, d'où l'on tire : $x = \frac{1,75 \times 100}{140} = \mathbf{1,25\,\%}$.

*3° **Calcul de la mesure de la grandeur à laquelle on applique le pourcentage,*** connaissant le pourcentage et le résultat de l'application du pourcentage.

Un commissionnaire a reçu une commission de 137 F calculée au taux de 5 % sur le montant d'une affaire qu'il a traitée. Quel est le montant de cette affaire ?

SOLUTION. — Si y est, en francs, le montant de cette affaire :

$$\frac{5}{100} = \frac{137}{y}.$$

$$y = \frac{137\text{ F} \times 100}{5} = \mathbf{2\,740\text{ F}}.$$

3. Pourcentages en dehors.

On a souvent à effectuer des calculs de tant pour cent pour lesquels le pourcentage ne s'applique pas aux nombres donnés, mais à des nombres plus grands (ou plus petits) liés aux précédents par des relations d'addition ou de soustraction.

Lorsque le calcul de pourcentage se fait sur un nombre *plus grand* que le nombre donné, il s'agit de ***pourcentage en dehors.***

PROBLÈME. — *Un fabricant est soumis à la taxe à la valeur ajoutée, calculée au taux de 20 %, sur le montant de ses ventes taxe comprise. Quand le montant de ses ventes taxe non comprise (ou hors taxe) est de 1 100 000 F, trouver :*

— le montant de la taxe,

— le montant des ventes taxes comprises.

SOLUTION. — Quand le prix de vente, taxe comprise, est de 100 F, la taxe est de 20 F et le prix de vente hors taxe est de : 100 F − 20 F = 80 F.

(Le tableau ci-contre schématise ces relations.)

Prix de vente avec taxe.	100
Taxe	20
Prix de vente hors taxe.	80

La taxe est ainsi les $\frac{20}{80}$ du prix de vente sans taxe et s'élève donc à :

$$1\,100\,000\text{ F} \times \frac{20}{80} = \mathbf{275\,000\text{ F}}.$$

Le montant des ventes, taxes comprises, est les $\frac{100}{80}$ du prix de vente sans taxe, c'est-à-dire :

$$1\,100\,000\text{ F} \times \frac{100}{80} = \mathbf{1\,375\,000\text{ F}}.$$

4. Pourcentages en dedans.

Dans ce cas, le calcul du pourcentage s'effectue sur un nombre *plus petit* que le nombre donné.

PROBLÈME. — *Après majoration de 25 % du prix ancien, le prix nouveau d'une marchandise s'établit à 1 200 F. Calculer :*

— le montant de la majoration,

— le prix ancien.

Prix ancien	100
Majoration	25
Prix nouveau	125

SOLUTION. — La majoration (voir tableau ci-contre) est les $\frac{25}{125}$ du prix nouveau, soit :

$$1\,200\text{ F} \times \frac{25}{125} = \mathit{240\ F.}$$

Le prix ancien est les $\frac{100}{125}$ du prix nouveau, c'est-à-dire :

$$1\,200\text{ F} \times \frac{100}{125} = \mathit{960\ F.}$$

B. BÉNÉFICES

5. Prix de vente. Coûts et marges. Prix de revient et bénéfice.

1° On appelle ***marge la différence entre un prix de vente et le coût correspondant.***

Le prix de vente pris en considération dans le calcul est le prix de vente net, c'est-à-dire le prix de vente marqué diminué le cas échéant des réductions consenties à l'acheteur (1).

On peut calculer divers coûts. Le plus fréquemment utilisé est le coût d'achat :

Coût d'achat = Prix d'achat + Frais sur achat.

On appelle ***marge brute, la différence entre le prix de vente net et le coût d'achat correspondant.***

On disait autrefois *bénéfice brut* pour marge brute.

EXEMPLE :

Prix d'achat d'un objet	840 F	Prix de vente net	1 292 F
Frais sur achat	64,40 F	Coût d'achat	904,40 F
Coût d'achat	*904,40 F*	Marge brute	*387,60 F*

2° Outre les frais d'achat, le commerçant supporte d'autres frais que l'on peut classer soit en frais de vente et en frais généraux (ou d'administration), soit en frais proportionnels (aux ventes) et en frais fixes.

On appelle ***prix de revient le total du prix d'achat et des frais.***

Le bénéfice est la différence entre le prix de vente réel et le prix de revient correspondant.

On précise souvent *bénéfice net* pour éviter toute confusion avec la marge brute.

EXEMPLE (*suite du précédent*) :

Prix d'achat d'un objet		840 F	Prix de vente net	1 292 F
Frais d'achat	64,40 F		Prix de revient	1 164,40 F
Frais de vente	120 F		Bénéfice net	*127,60 F*
Frais généraux	140 F	324,40 F		
Prix de revient		*1 164,40 F*		

3° Il est d'usage de calculer les pourcentages de marge brute et de bénéfice net par rapport au prix net des ventes.

Le pourcentage de marge brute par rapport au prix de vente est le taux de marque brute.

(1) Compte non tenu des taxes qui peuvent s'ajouter.

6. Problèmes relatifs à la marge brute.

1° *Calcul de la marge brute.*

On connaît le prix de vente et le taux de marque.

PROBLÈME. — *On vend sans remise un poste de télévision marqué 1 400 F. Le taux de morque étant de 30 %, calculer le montant de la marge brute.*

SOLUTION. — Le montant de la marge brute est : $1\,400 \text{ F} \times \frac{30}{100} = \textit{420 F.}$

GÉNÉRALISATION. — Soient, pour ce problème et les problèmes suivants : **A**, le coût d'achat ; M, la marge brute ; V_0 le prix de vente net ; m, le taux de marque :

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{V_0}\, m}{\mathbf{100}}.$$

2° *Calcul du prix de vente net.*

On connaît le coût d'achat et le taux de marque. Il s'agit là d'un problème que les commerçants ont très fréquemment à résoudre, surtout lorsqu'ils peuvent fixer sans contraintes leurs prix de vente.

PROBLÈME. — *Le coût d'achat d'un appareil récepteur de radio étant de 240 F et le taux de marque de 25 %, calculer le prix de vente.*

SOLUTION. — Quand le prix de vente est 100, le taux de marque est 25 et le coût d'achat 100 — 25 = 75. Le prix de vente est ainsi les $\frac{100}{75}$ du coût d'achat ; il est donc égal à: $240 \text{ F} \times \frac{100}{75} = \textit{320 F.}$

Prix de vente	100
Marge brute	25
Coût d'achat	75

GÉNÉRALISATION :

$$\mathbf{V_0} = \mathbf{A} \times \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{100} - m}.$$

3° *Calcul du taux de marque brute.*

On connaît le coût d'achat et le prix de vente. Il s'agit encore là d'un problème très courant dans le commerce, surtout lorsque le marché est concurrentiel : le prix de vente est alors voisin nécessairement des prix du marché et n'est pas fixé en fonction du taux de marque.

PROBLÈME. — *Un appareil réfrigérateur dont le coût d'achat est 904,40 F est vendu net 1 292 F. Quel est le taux de marque brute ?*

SOLUTION. — La marge brute est de : 1 292 F — 904,40 F = 387,60 F. Elle représente les $\frac{387{,}60}{1\,292}$ du prix de vente, soit un taux de : $\frac{387{,}60 \times 100}{1\,292} = \textit{30}\,\%$ du prix de vente.

GÉNÉRALISATION:

$$m = \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{100}}{\mathbf{V_0}}.$$

4° *Étant donné le taux de marque brute, calculer le pourcentage de marge par rapport au coût d'achat.*

PROBLÈME. — *Un commerçant veut vendre une série d'objets avec un taux de marque brute de 40 %. De quel pourcentage doit-il majorer les coûts d'achat des objets de la série ?*

SOLUTION. — Pour un prix de vente de 100 F, la marge brute est de 40 F et le coût d'achat de $100 - 40 = 60$ F. La marge brute est donc les $\frac{40}{60}$ du coût d'achat. Pour 100 F de coût d'achat, elle est de $\frac{100 \text{ F} \times 40}{60} = \frac{200}{3}$ (soit approximativement *66,66* %).

Prix de vente	100
Marge brute	40
Coût d'achat	60

GÉNÉRALISATION. — p étant le pourcentage de marge par rapport au coût d'achat :

$$p = 100 \times \frac{m}{100 - m}.$$

REMARQUE. — Des barèmes permettent la lecture directe du pourcentage de marge par rapport au coût d'achat lorsqu'on connaît le taux de marque brute. Ainsi les commerçants peuvent-ils calculer la marge brute en partant du coût d'achat, puis le prix de vente.

5° Calcul de la marge brute à partir du coût d'achat.

PROBLÈME. — *Le coût d'achat d'un tourne-disques est de 160 F. Sachant que le pourcentage de marge brute par rapport au coût d'achat est de 25 %, trouver le prix de vente et la marge brute.*

SOLUTION. — Quand le coût d'achat est de 100 F, la marge brute est de 25 F et le prix de vente de 125 F. Le prix de vente est donc les $\frac{125}{100}$ du prix d'achat, soit : $160 \text{ F} \times \frac{125}{100} = $ *200 F.*

Coût d'achat	100
Marge brute	25
Prix de vente	125

La marge brute est : $160 \text{ F} \times \frac{25}{100} = 40$ F.

GÉNÉRALISATION : $$V_0 = A \times \frac{100 + p}{100}; \qquad M = A \times \frac{p}{100}.$$

7. Problèmes relatifs aux prix de vente.

1° Calcul du prix de vente marqué à partir du prix de vente net et des taux de réduction.

Les réductions se calculent sur le prix marqué ; on les appelle ***remises, rabais, escomptes de règlement.***

PROBLÈME I (Une seule réduction). — *Un fabricant désire recevoir net 42 F de la vente d'un flacon de parfum qu'il effectue avec une remise de 40 % sur le prix de vente marqué. Calculer le prix marqué du flacon.*

SOLUTION. — Pour un prix net de 100 F, la remise est 40 F et le prix net 60 F. Donc, pour un prix net de 42 F, le prix marqué est :

$$\frac{42 \text{ F} \times 100}{60} = \textit{70 F.}$$

Prix marqué	100
Remise	40
Prix net	60

PROBLÈME 2 (Plusieurs réductions). — Les réductions se calculent successivement, car les taux ne s'ajoutent pas (calculs en cascade.)

Un fabricant désire vendre un rasoir électrique à un détaillant avec une double remise de 20 et 10 % sur le prix de vente marqué. S'il désire recevoir net 5 400 F, quel doit être le prix de vente marqué ?

SOLUTION. — Le tableau ci-contre montre que, pour un prix marqué de 100 F, le prix net est 72 F. Donc à un prix net de 5 400 F correspond un prix marqué de :

$$\frac{5\,400 \text{ F} \times 100}{72} = \mathbf{7\,500\ F.}$$

Prix marqué	100
Remise 20%	20
	80
Remise 10%	8
Prix net	72

2° Calcul du prix de vente taxe comprise à partir du prix de vente hors taxe (sans taxe) et du taux de la taxe fiscale.

Ce problème a déjà été traité dans le paragraphe 3 de la présente leçon. Remarquer que :

1° le prix de vente sans taxe est le prix de vente net ;

2° lorsque plusieurs taxes sont calculées sur le prix de vente taxes comprises, on peut les remplacer dans le calcul par une taxe unique dont le taux est la somme des taux des taxes données.

8. Problèmes sur les bénéfices.

Ces problèmes ont trait :

a) soit à la détermination du bénéfice net ;

b) soit au calcul du taux de bénéfice net de l'année par rapport :

— au montant de ventes,

— au montant du capital engagé par l'entreprise.

Ils ne présentent aucune difficulté et peuvent être traités en s'inspirant des exemples précédents.

EXERCICES

899. Calculer le taux de la remise faite par un marchand de chaussures à une cliente lorsqu'il lui fait payer 54,15 F une paire de chaussures marquée 57 F.

900. Un commissionnaire reçoit pour une vente 75 F. Son taux de commission est 6%. Quel est le montant de la vente?

901. Pour un mois, la taxe à la valeur ajoutée, due sur les ventes du mois précédent, s'élève à 16 000 F. Cette taxe se calcule sur le chiffre d'affaires net, taxe comprise, au taux de 20%. Calculer directement le montant des ventes sans taxe.

902. Un commerçant prélève un bénéfice de 25% sur le prix de vente d'une marchandise dont le coût d'achat est 300 F. Calculer le bénéfice, le prix de vente.

903. Le prix indiqué sur le conditionnement d'un produit pharmaceutique ne comprend pas la taxe locale perçue par le pharmacien au taux de 2,75%. Calculer le montant de la taxe quand le prix indiqué est de 1 500 F. Quelle est la somme à payer?

904. Le prix de vente d'une marchandise est majoré de 8 % : il s'établit alors à 21,60 F. Quel était le prix ancien ? Ce prix ancien était calculé en tenant compte d'un taux de marque brute de 40%. Quel était le coût d'achat?

905. Un réfrigérateur revient à 1 050 F à un détaillant qui fixe son prix de vente sans taxe en tenant compte d'un taux de marque brute de 30% et qui inclut dans son prix de vente marqué la taxe locale de 2,75%. Quel est le prix marqué (arrondi au franc supérieur)?

906. Une marchandise est vendue avec une double remise de 20 et 8%. Calculer le taux unique de réduction correspondant à cette double remise.

907. Un commerçant gagne sur un article 22% du prix de vente. S'il le vendait 9,90 F de moins, sa marge bénéficiaire représenterait 25% du coût d'achat. Quel est le coût d'achat de cet article?

Trouver également la marge brute et le prix d'achat (les frais relatifs à l'achat représentent 10% du prix d'achat).

908*. Un représentant de commerce a le choix entre deux modes de rémunération :

— ou bien un « fixe » de 1 400 F par mois plus un pourcentage de 1,50% sur le chiffre d'affaires réalisé;

— ou bien un pourcentage de 5% sur le chiffre d'affaires réalisé, sans rémunération fixe.

1° Quel est le mode de rémunération le plus avantageux pour un chiffre d'affaires mensuel de 26 400 F?

2° Pour quel chiffre d'affaires les deux modes de rémunération sont-ils équivalents? Pour quel chiffre d'affaires le second mode de rémunération est-il inférieur de 280 F au premier?

909*. Trois vendeurs A, B, C comparent leurs rémunérations mensuelles respectives. En mars, ils ont touché :

A : 900 F pour un chiffre d'affaires réalisé de 20 870 F;

B : 962,20 F pour un chiffre d'affaires réalisé de 22 640 F;

C : 1 128,25 F pour un chiffre d'affaires réalisé de 25 700 F.

On précise que la rémunération mensuelle de A est fixe; que celle de B est directement proportionnelle au chiffre d'affaires réalisé; que celle de C comporte des appointements fixes auxquels s'ajoute une commission proportionnelle au chiffre d'affaires réalisé. En février, C avait touché en tout 1 110,75 F pour un chiffre d'affaires de 23 950 F.

1° Calculer le pourcentage de la rémunération de B par rapport au chiffre d'affaires qu'il réalise.

2° Calculer le montant de la rémunération fixe de C et le pourcentage de sa commission par rapport au chiffre d'affaires.

3° Pour un chiffre d'affaires variant de 0 à 30 000 F, comment se situent les rémunérations les unes par rapport aux autres ?

910. Un commerçant vend des machines qu'il achète au prix unitaire de 2 130 F. Il calcule son prix de vente net à partir de ce prix d'achat en incorporant des frais qui représentent 12% du prix d'achat et un bénéfice brut calculé d'après le taux de marque de 25% sur le prix de vente net. Quel sera ce prix de vente net?

Le commerçant inscrit la machine sur son catalogue au prix de 3 200 F comptant. Quel pourcentage d'escompte de règlement peut-il accorder à un acheteur au comptant, sans toucher au bénéfice qu'il s'était fixé?

911. Un commerçant désire vendre un objet 216 F. Il a calculé ainsi le prix de vente prévu : au prix d'achat, il a ajouté 8% de frais d'achat, puis, au coût d'achat, 25% de frais de vente (calculés sur le prix de revient), enfin, au prix de revient ainsi obtenu, 20% de bénéfice (calculé sur le prix de vente). Quel est le prix d'achat?

Il vend l'objet 225 F. Calculer la marge brute. Calculer le taux réel de marge brute?

912. Deux articles de même qualité sont achetés à deux reprises différentes, au même cours, par un commerçant.

La première fois, il a payé 4% de frais sur le prix d'achat et a fixé son prix de vente en tenant compte d'un taux de marque de 20%.

La seconde fois, les frais d'achat s'élèvent à 5% du prix d'achat. Le commerçant décide de porter son bénéfice à 26% du prix de revient.

Son prix de vente se trouvant majoré de 2,30 F par article, calculer le prix d'achat de l'article.

49. INTÉRÊTS SIMPLES

1. L'intérêt est le loyer d'un capital prêté.

Lorsqu'une personne (prêteur) prête à une autre personne (emprunteur) une somme d'argent ou *capital*, elle exige en général d'elle le paiement d'une rémunération correspondant au service rendu : on dit que l'emprunteur verse au prêteur l'*intérêt du capital*. Bien entendu, l'emprunteur rend en outre le capital au prêteur.

L'intérêt peut être versé au prêteur soit lors du remboursement du capital lorsque le placement est de courte durée (moins d'un an), soit à la fin de périodes fixes (tous les trois mois ou tous les six mois ou tous les ans) jusqu'à la date de remboursement du capital.. Le placement est dit dans ces deux cas à *intérêts simples*. Sauf convention contraire, le capital dû reste invariable pendant la durée du prêt.

Parfois, lorsque le temps de placement est long (5 ans, 10 ans, 30 ans), l'intérêt n'est pas toujours versé périodiquement au prêteur ; il s'ajoute alors en fin de période (année, en général) au capital pour porter lui-même intérêt pendant la période suivante. Un tel placement est dit à *intérêts composés*. Sauf convention contraire, l'emprunteur rembourse à la fin de l'emprunt le capital augmenté de ses intérêts composés. Nous n'étudierons dans ce chapitre que les intérêts simples.

2. Le calcul de l'intérêt repose sur une convention.

L'intérêt simple est à la fois proportionnel au capital, au temps de placement et au taux de placement.

Le taux est l'intérêt de 100 F pendant un an. Il s'exprime ainsi en tant pour cent. Dire que l'on emprunte à 5% l'an signifie que l'on s'engage à payer un Intérêt de 5 F pour 100 F de capital et pour une jouissance d'une année. Actuellement, les taux varient entre 0,5% et 10%, suivant le genre de prêt et les risques courus par les prêteurs.

L'intérêt annuel d'un capital constitue le *revenu de ce capital.*

On admet en France que *l'année financière se compose de 360 jours.*

3. Calcul de l'intérêt.

1° Calculer l'intérêt de 840 F en 3 ans, au taux de 4,5 %.

L'intérêt annuel est les $\frac{4,50}{100}$ du capital, soit :

$$840 \text{ F} \times \frac{4,50}{100}.$$

En 3 ans, l'intérêt est de : $840 \text{ F} \times \frac{4,50}{100} \times 3 = 113,40 \text{ F}.$

GÉNÉRALISATION. — Soient C le capital, t le taux, a le nombre d'années ; l'intérêt est :

$$i = \frac{C \cdot t \cdot a}{100}.$$

2° Calculer l'intérêt de 720 F à 3 % en 60 jours.

L'intérêt étant à la fois directement proportionnel au capital et au temps, on peut écrire, si i est l'intérêt cherché :

3 F sont rapportés par 100 F en 360 *j* ;
i F sont rapportés par 720 F en 60 *j*.

Donc :

$$\frac{i}{3} = \frac{720}{100} \times \frac{60}{360}.$$

d'où l'on tire :

$$i = \frac{720 \text{ F} \times 60 \times 3}{100 \times 360} = \mathit{3{,}60\ F}.$$

GÉNÉRALISATION. — Soient C le capital (exprimé en francs), t le taux, n le nombre de jours.

t F sont rapportés par 100 francs en 360 jours ;
i F sont rapportés par C francs en n jours.

Donc :

$$\frac{i}{t} = \frac{C}{100} \times \frac{n}{360} ;$$

et :

$$\boxed{i = \frac{C \,.\, t \,.\, n}{36\,000}.}$$

Application numérique : $i = \dfrac{720 \text{ F} \times 60 \times 3}{36\,000} = \mathit{3{,}60\ F}.$

REMARQUE. — 1° Lorsque le temps est exprimé en mois (m), on compte les mois pour 30 *j* et la formule précédente devient :

$$i = \frac{Ctm}{1\,200}.$$

2° Lorsqu'un temps de placement court d'une date à une autre, on compte les mois pour leur durée réelle. Ainsi, du 7 janvier au 1er mai 1963, on compte : 24 *j* pour janvier, 28 *j* pour février (année normale), 31 *j* pour mars, 30 *j* pour avril, 1 *j* pour mai, soit en tout : 114 jours.

4. Calcul du capital.

Calculer le capital qui, en 54 jours, donne à 5 % un intérêt de 4,50 F.

a) SOLUTION ARITHMÉTIQUE. — 100 F en 54 *j* rapportent : $\dfrac{5 \text{ F} \times 54}{360} = 0{,}75$ F.

L'intérêt est donc les $\dfrac{0{,}75}{100}$ du capital.

Le capital vaut : $4{,}50 \text{ F} \times \dfrac{100}{0{,}75} = \mathit{600\ F}.$

b) SOLUTION ALGÉBRIQUE. — Remplaçons dans la formule des intérêts les quantités connues par leurs valeurs :

$$4{,}50 = \frac{C \times 5 \times 54}{36\,000}.$$

D'où :

$$C = \frac{4{,}50 \times 36\,000}{5 \times 54} = \mathit{600\ F}.$$

c) GÉNÉRALISATION. — De la formule $i = \dfrac{Ctn}{36\,000}$,

on tire :

$$36\,000\ i = Ctn,$$

et :

$$\boxed{C = \frac{36\,000\ i}{tn}.}$$

Application numérique :

$$C = \frac{36\,000 \times 4{,}50}{5 \times 54} = \mathit{600\ F}.$$

5. Calcul du taux.

A quel taux faut-il placer un capital de 540 F pour obtenir un intérêt de 3 F en 50 jours ?

a) SOLUTION ARITHMÉTIQUE. — En 360 *j*, l'intérêt est : $\dfrac{3\ F \times 360}{50} = 21{,}60$ F.

Il s'élève donc aux $\dfrac{21{,}60}{540}$ du capital. Pour 100 F de capital et une année de placement, l'intérêt est de :

$$\frac{100\ F \times 21{,}60}{540} = 4\ F.$$

Le taux est **4**%.

b) SOLUTION ALGÉBRIQUE. — La formule des intérêts permet d'écrire :

$$3 = \frac{540\ F \times t \times 50}{36\,000}.$$

D'où :

$$t = \frac{3 \times 36\,000}{540 \times 50} = \mathbf{4}, \text{ soit } \mathbf{4}\%.$$

c) GÉNÉRALISATION. — De la formule des intérêts, on tire :

$$\boxed{t = \frac{36\,000\ i}{Cn}.}$$

Application numérique :

$$t = \frac{36\,000 \times 3}{540 \times 50} = \mathit{4}, \text{ soit } \mathit{4}\%.$$

6. Calcul du temps.

Pendant combien de jours faut-il placer un capital de 1 200 F, au taux de 4,50 %, pour obtenir un intérêt de 6,30 F ?

a) SOLUTION ARITHMÉTIQUE. — En 360 *j*, l'intérêt de ce capital serait :

$$\frac{1\,200\text{ F} \times 4{,}50}{100} = 54\text{ F}.$$

L'intérêt réellement produit est les $\frac{6{,}30}{54}$ de ce qu'aurait été l'intérêt annuel du même capital au même taux. Donc, le temps de placement est les $\frac{6{,}30}{54}$ de 360 *j*, c'est-à-dire :

$$\frac{360\ j \times 6{,}30}{54} = 42\ j.$$

b) La solution algébrique n'offre aucune difficulté.

c) GÉNÉRALISATION. — De la formule des intérêts, on tire :

$$n = \frac{36\,000\, i}{Ct}.$$

Application numérique : $n = \frac{36\,000 \times 6{,}30}{1\,200 \times 4{,}50} = 42\ j.$

7. Formule simplifiée du calcul des intérêts.

La formule générale des intérêts $i = \frac{Ctn}{36\,000}$ peut, pour certains taux, être simplifiée. Ainsi, pour le taux 6 %, elle devient :

$$i = \frac{C \times 6 \times n}{36\,000} \quad \text{ou} \quad i = \frac{Cn}{6\,000}.$$

Le produit C*n* du capital par le nombre de jours s'appelle le ***Nombre***.
Le quotient de 36 000 par le taux est le ***diviseur***.
Lorsque 36 000 est divisible par le taux, la formule générale peut se mettre sous la forme :

$$i = \frac{Cn}{36\,000 : t}$$

que l'on écrit :

$$i = \frac{Cn}{D}.$$

Règle. — L'intérêt est égal au quotient du Nombre par le diviseur.

Il est indispensable de connaître par cœur les diviseurs correspondant aux taux usuels :

Taux	2 %	2,5 %	3 %	4 %	4,5 %	5 %	6 %	8 %
Diviseurs	18 000	14 400	12 000	9 000	8 000	7 200	6 000	4 500

EXEMPLE. — *Calculer l'intérêt de 3 846,15 F pendant 37 jours au taux de 4,50 %.*

Théoriquement, on applique la formule précédente :

$$i = \frac{3\,846{,}15 \times 37}{8\,000} = \frac{142\,307{,}55}{8\,000} = \mathit{17{,}78\ F.}$$

Mais, pratiquement, on arrondit le capital à 1 F près, on calcule le Nombre et l'on divise le centième du Nombre (arrondi à 1 près) par le centième du diviseur :

$$3\,846 \times 37 = 142\,302 \quad \text{et} \quad 1\,423 : 80 = 17{,}78 \text{ F.}$$

REMARQUE. — Cette formule est d'un emploi commode lorsqu'il s'agit de calculer l'intérêt de plusieurs capitaux au même taux et on l'utilise fréquemment dans le calcul mécanographique. Il suffit de diviser la somme des Nombres par le diviseur. En effet :

$$I = i_1 + i_2 + i_2 + \dots = \frac{C_1n_1}{D} + \frac{C_2n_2}{D} + \frac{C_3n_3}{D} \dots = \frac{C_1n_1 + C_2n_2 + C_3n_3 \dots}{D}.$$

8. Problèmes sur les intérêts joints au capital.

1° Lorsque les intérêts s'ajoutent au capital, sans porter eux-mêmes intérêts, la formule donnant la valeur acquise par le capital est :

$$A = C + \frac{Ctn}{36\,000}$$

2° Le calcul du capital C en fonction de la valeur acquise A est délicat. En général on résout ce problème en prenant pour base un capital de 100 F.

EXEMPLE. — *Un capital est devenu, avec ses intérêts, 321,60 F après 30 jours de placement à 6 %. Trouver le capital.*

a) SOLUTION ARITHMÉTIQUE. — 100 F placés à 6 % pendant 30 *j* rapportent :

$$\frac{6 \times 30}{360} = 0{,}50 \text{ F}$$

et deviennent : 100 F + 0,50 F = 100,50 F.

Le capital est donc les $\frac{100}{100{,}50}$ de la valeur acquise ou :

$$\frac{321{,}60 \text{ F} \times 100}{100{,}50} = \mathit{320\ F.}$$

b) SOLUTION ALGÉBRIQUE. — On pose l'équation :

$$C + \frac{C \times 6 \times 30}{36\,000} = 321{,}60, \text{ puis on calcule C.}$$

EXERCICES

Calculer l'intérêt de :

913. 243,50 F placés pendant 4 ans à 3 %.
914. 820,90 F placés pendant 3 mois à 4 %.
915. 428,75F placés pendant 16 mois à 3,60 %.
916. 204,86 F placés pendant 92 *j* à 4,50 %.
917. 7 146,75 F placés pendant 47 *j* à 5 %.

} Au moyen de la formule générale, puis en employant la formule simplifiée.

Calculer le capital qui :

918. Placé à 3,75 % pendant 5 ans, a produit 12 F d'intérêts.

919. Placé à 4 % pendant 8 mois, a produit 14,40 F d'intérêts.

920. Placé à 6 % pendant 45 *j*, a produit 24 F d'intérêts.

921. Placé à 5 % pendant 36 *j*, a produit 2 F d'intérêts.

Calculer le temps de placement nécessaire à :

922. Un capital de 427,50 F pour rapporter 6,84 F à 6 %.

923. Un capital de 1 584 F pour rapporter 27,50 F à 5 %.

Calculer le taux de placement :

924. D'un capital de 972 F, qui, en 130 *j*, rapporte 24,57 F d'intérêts.

925. D'un capital de 15 560 F, qui, en 18 *j*, rapporte 7,78 F d'intérêts.

926. Une personne qui place son avoir ainsi : les 2/5 à 3 %, le 1/6 à 4,50 % et le reste à 5 %, retire annuellement un intérêt de 592,80 F. Quel est le montant de son avoir?

927. Deux capitaux s'élèvent ensemble à 22 970 F. Ils sont placés à des taux différents et ont produit un intérêt, en 1 an, de 1 101,25 F. Le premier surpasse l'autre de 4 070 F et rapporte 250,75 F de plus par an. A quels taux ces deux capitaux sont-ils placés?

928. Une personne place de l'argent, partie à 5 %, partie à 6 %. Son revenu annuel est 1 440 F. Si la somme placée à 5 % l'était à 6 % et inversement, le revenu annuel serait de 1 420 F. Trouver les valeurs des deux parts du capital.

929. La somme de deux capitaux est 49 480 F. Le premier est placé à 4,50 % pendant 6 mois et le second à 3 % pendant 10 mois. Les intérêts produits par le premier sont inférieurs de 97 F aux intérêts produits par le second. Calculer la valeur primitive de chaque capital.

930*. Avec le capital dont elle dispose, une personne voudrait acheter une maison et un jardin. La maison vaut les 4/5 du capital, le jardin 1/4 de ce même capital. La somme disponible n'étant pas suffisante pour ce double achat, la personne laisse son capital placé à 6 % pendant un certain temps.
Pendant combien de mois ce capital doit-il rester placé pour que l'achat soit possible? Quel est ce capital, sachant qu'au bout de 1 an, la personne aura 200 F de plus que la somme nécessaire à l'acquisition?

931. Une somme de 5 400 F est divisée en deux parties. La première partie est placée à 4,50 %, la deuxième à 6 %. Le rapport du temps de placement de la première à celui de la deuxième est $\frac{8}{15}$. Le rapport de l'intérêt de la première à celui de la deuxième est $\frac{73}{155}$. Calculer les deux parties de la somme.

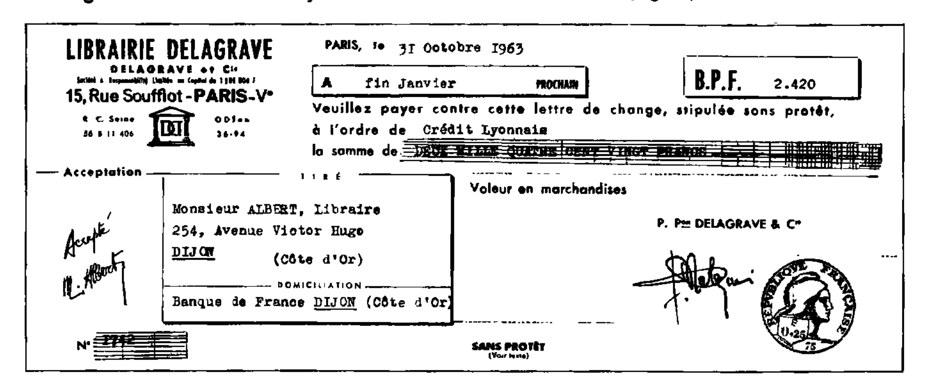
932. La somme de trois capitaux est 14 520 F. Le deuxième surpasse le premier de 1/8 de ce premier capital et le deuxième placé à 6 % rapporte autant en 6 mois que le troisième placé à 5 % pendant 9 mois. Quels sont ces capitaux?

933. Un capital inconnu placé à un taux inconnu pendant 8 mois a produit 96 F d'intérêts. Un second capital, supérieur au premier de 200 F et placé à un taux égal aux 6/5 du premier taux pendant 3 mois, a produit un intérêt de 46,80 F. Calculer les deux capitaux et les deux taux.

50. ESCOMPTE COMMERCIAL

1. Les paiements à crédit peuvent se faire au moyen d'effets de commerce qui sont généralement escomptables.

Dans le commerce, les paiements de marchandises se font souvent à crédit (30, 60, 90 jours après la livraison et parfois davantage). Les règlements s'effectuent alors généralement au moyen d'***effets de commerce*** (fig. 1).



LIBRAIRIE DELAGRAVE
DELAGRAVE et Cie
15, Rue Soufflot - PARIS-V°

PARIS, le 31 Octobre 1963

A fin Janvier PROCHAIN

B.P.F. 2.420

Veuillez payer contre cette lettre de change, stipulée sans protêt, à l'ordre de Crédit Lyonnais la somme de [redacted]

Valeur en marchandises

P. Pon DELAGRAVE & Cie

Acceptation

Accepté
M. Albert

TIRÉ

Monsieur ALBERT, Libraire
254, Avenue Victor Hugo
DIJON (Côte d'Or)

DOMICILIATION
Banque de France DIJON (Côte d'Or)

N° [redacted]

SANS PROTÊT

Fig. 1. — *Lettre de change.*

Un fournisseur, créancier à 60 jours de son client, tire sur ce dernier une ***lettre de change*** à 60 jours ; autrement dit, il invite son client à payer la somme due au jour convenu.

Le fournisseur peut, sans attendre le jour du paiement, se procurer de l'argent chez son banquier au moyen de cette lettre de change. Il la vend au banquier. Celui-ci l'escompte et lui donne, en contrepartie, une somme égale à celle qui est portée sur la lettre (*valeur nominale*), diminuée d'une retenue appelée *agio*. La valeur ainsi remise par le banquier est la *valeur escomptée* de l'effet ou la *valeur nette*.

Les effets de commerce se présentent parfois sous une forme différente de la lettre de change : le ***billet à ordre***, souscrit par le débiteur, est un engagement de payer une somme due, à échéance convenue ; le ***warrant*** est un billet à ordre gagé par des marchandises déposées dans des Magasins généraux.

Les banquiers escomptent les billets à ordre et les warrants dans les mêmes conditions que les lettres de change.

Valeur escomptée = Valeur nominale — Agio.

2. Pratique de l'escompte commercial.

L'agio se compose :

1° *De l'intérêt de la valeur nominale, compté du jour de la négociation au jour de l'échéance*. Cet intérêt, calculé à un taux fixé par le banquier, constitue l'***escompte commercial***.

2° *Du change de place et des commissions*. Grâce à ces retenues, le banquier récupère les frais qu'il doit engager pour se faire payer à l'échéance la lettre de

change par le client. Les commissions et changes de place s'expriment en général, soit en tant pour cent de la valeur nominale (ex. : 0,50 %), soit en taxes fixes (ex. : 0,50 F par effet). Elles ne dépendent pas du temps.

Toutefois les banques prélèvent actuellement une *commission d'endos* fixée au minimum à 0,60 % l'an de la valeur nominale des effets et qui se calcule en tenant compte du temps que l'effet a encore à courir, soit pour le nombre de jours exact, soit, chez certains banquiers, pour le nombre de mois (arrondi à l'unité supérieure).

Ainsi pour un effet de 500 F à 45 *j*, au taux 0,90 % l'an, la commission d'endos est :

$$500 \text{ F} \times \frac{0{,}90}{100} \times \frac{45}{360} = 0{,}5625 \text{ F} \approx \mathbf{\mathit{0{,}57\ F.}}$$

On appelle ***valeur actuelle commerciale, la différence entre la valeur nominale et l'escompte commercial*** (on ne tient donc pas compte des frais). La valeur actuelle d'un effet représente sa valeur théorique d'échange un jour donné.

3. Les formules de l'escompte commercial se déduisent de celles de l'intérêt.

Si l'effet a une valeur nominale A et s'il est escompté pour *n* jours à 1% (diviseur D), l'escompte commercial est donné par les formules :

$$\boxed{e = \frac{Atn}{36\,000}} \quad \text{ou} \quad \boxed{e = \frac{An}{D}.}$$

On en déduit aisément les formules donnant la valeur actuelle commerciale a :

$$a = A - e$$

$$a = A - \frac{Atn}{36\,000} \qquad\qquad a = A - \frac{An}{D}$$

$$a = \frac{A\ (36\,000 - tn)}{36\,000} \qquad\qquad a = \frac{A\ (D - n)}{D}$$

APPLICATION NUMÉRIQUE :

A = 5 325 F ; n = 48 ; t = 4,50 % (diviseur 8 000).

$$e = \frac{5\,325 \times 48 \times 4{,}50}{36\,000} = 31{,}95 \text{ F}$$

$$a = 5\,325 \text{ F} - 31{,}95 \text{ F} = 5\,293{,}05 \text{ F}$$

ou directement :

$$a = \frac{5\,325\ (36\,000 - 48 \times 4{,}5)}{36\,000} = 5\,293{,}05 \text{ F.}$$

$$e = \frac{5\,325 \times 48}{8\,000} = 31{,}95 \text{ F}$$

$$a = 5\,325 \text{ F} - 31{,}95 \text{ F} = 5\,293{,}05 \text{ F}$$

ou directement :

$$a = \frac{5\,325\ (8\,000 - 48)}{8\,000} = 5\,293{,}05 \text{ F.}$$

Calcul de la valeur escomptée.

Si l'on désigne par c le montant en francs des commissions et changes de place, la valeur escomptée b est égale à :

$$b = A - (e + c).$$

Lorsque l'effet de 5 325 F supporte un change de place de 0,50 % et une commission fixe de 1 F, l'agio s'élève alors à :

$$31{,}95\ \text{F} + \frac{5\,325\ \text{F} \times 0{,}50}{100} + 1\ \text{F} = 59{,}58\ \text{F}.$$

La valeur escomptée est :

$$5\,325\ \text{F} - 59{,}58\ \text{F} = 5\,265{,}42\ \text{F}.$$

Les calculs d'escompte figurent sur un document remis par le banquier et appelé *bordereau d'escompte*.

Sur les bordereaux d'escompte, les banquiers ajoutent à l'agio le montant des taxes sur le chiffre d'affaires (actuellement 8,50 % de l'agio, taxes comprises).

4. Dans les problèmes relatifs à l'escompte, on peut aussi se proposer de calculer soit le capital, soit le taux, soit le temps.

Ces problèmes sont tout à fait comparables à ceux que nous avons résolus à propos de l'intérêt simple. Nous nous contenterons donc de donner les formules :

$$A = \frac{36\,000\,e}{tn} \qquad t = \frac{36\,000\,e}{An} \qquad n = \frac{36\,000\,e}{At}.$$

Si l'une des grandeurs figurant dans ces formules n'est pas connue, il est en général facile de déterminer sa valeur en utilisant les données du problème.

Le calcul de la valeur nominale en fonction de la valeur actuelle (ou en fonction de la valeur escomptée) que l'on rencontre fréquemment dans la pratique peut être fait, soit par la méthode de supposition, soit par l'algèbre.

EXEMPLE. — *Un banquier escompte au taux 4 % un effet à 54 jours d'échéance et remet en échange une somme nette de 624,65 F, compte tenu d'une commission de 0,25 %. Trouver la valeur nominale de l'effet.*

a) SOLUTION ARITHMÉTIQUE. — Supposons une valeur nominale égale au diviseur 9 000 F. Pour 9 000 F de *valeur nominale*, l'escompte est 54 F ;

la commission est : $\frac{9\,000\ \text{F} \times 0{,}25}{100} = 22{,}50\ \text{F}$;

l'agio s'élève à : $54\ \text{F} + 22{,}50\ \text{F} = 76{,}50\ \text{F}$

et la *valeur escomptée* est : $9\,000\ \text{F} - 76{,}50\ \text{F} = 8\,923{,}50\ \text{F}$.

Pour une valeur escomptée de 624,65 F, la valeur nominale est :

$$\frac{9\,000\ \text{F} \times 624{,}65}{8\,923{,}50} = \mathit{630\ F.}$$

b) SOLUTION ALGÉBRIQUE. — Si A est la valeur nominale cherchée :

$$A - \frac{A \times 54}{9\,000} - \frac{A \times 0{,}25}{100} = 624{,}65$$

$$A - \frac{6\,A}{1\,000} - \frac{2{,}5\,A}{1\,000} = 624{,}65$$

$$1\,000\,A - 6\,A - 2{,}5A = 624\,650$$

$$991{,}5\,A = 624\,650$$

$$A = \mathit{630\ F.}$$

5. Équivalences d'effets (ou de paiements).

1° *Équivalence de deux effets.*

Deux effets sont équivalents si, le jour fixé pour l'équivalence, la valeur actuelle du premier est égale à la valeur actuelle du second.

A_1 et A_2 étant les valeurs nominales des deux effets ; n_1 et n_2, les nombres de jours entre la date d'équivalence et les dates d'échéances respectives ; D le diviseur correspondant au taux fixé ; l'équivalence a lieu si :

$$A_1 - \frac{A_1 \times n_1}{D} = A_2 - \frac{A_2 \times n_2}{D}.$$

2° *Équivalence d'un effet et de plusieurs autres.*

Un effet est équivalent à plusieurs autres si, le jour fixé pour l'équivalence, la valeur actuelle de l'effet unique est égale à la somme des valeurs actuelles des autres effets.

A étant la valeur nominale de l'effet unique ; n, le nombre de jours séparant la date d'équivalence de la date d'échéance de cet effet unique ; A_1, A_2, A_3, les valeurs nominales des autres effets ; n_1, n_2, n_3, les nombres de jours compris entre la date d'équivalence et les dates d'échéances respectives de ces autres effets ; D, le diviseur correspondant au taux fixé ; l'équivalence a lieu si :

$$A - \frac{An}{D} = \left(A_1 - \frac{A_1n_1}{D}\right) + \left(A_2 - \frac{A_2n_2}{D}\right) + \left(A_3 - \frac{A_3n_3}{D}\right).$$

La connaissance de ces relations, en particulier de la dernière, permet de résoudre les *problèmes* — nombreux dans la pratique — *d'équivalence d'effets ou de paiements.* Ainsi, étant donné plusieurs effets définis par leurs valeurs nominales et les temps qu'ils ont encore à courir avant leurs échéances, on peut :

— Soit calculer la valeur nominale de l'effet unique (on connaît alors sa date d'échéance). C'est le problème dit d'***échéance commune.***

— Soit calculer la date d'échéance de l'effet unique (on connaît la valeur nominale de cet effet). Lorsque la valeur nominale de l'effet unique est en outre égale à la somme des valeurs nominales des autres effets, le problème est dit d'***échéance moyenne.***

EXERCICES

Calculer pour chacun des effets de commerce suivants l'escompte commercial et la valeur actuelle :

934. 79,80 F à 3 % pendant 48 *j.*

935. 136 F à 6 % pendant 63 *j.*

936. 242,60 F à 5 % pendant 39 *j.*

937. 421,60 F à 6 % pendant 63 *j.*

Calculer pour chacun des effets suivants l'agio et la valeur escomptée :

938. 2 325 F, escompte 4 %, 48 *j* ; change : 0,30 % ; commission : 0,20 %.

939. 7 341,25 F, escompte 5 %, 90 *j* ; commission de manipulation : 0,20 F par effet ; commission d'endos : 1,20 % l'an.

940. 947,35 F, escompte 4,50 %, 72 *j* ; change : 0,50 % (minimum : 0,20 F).

941. 384,69 F, escompte 4,25 %, 45 *j* ; effet au pair ; commission d'endos : 0,60 % l'an.

942*. Un banquier escompte à 4,50% un effet de 600 F dont l'échéance est à 48 *j*. Sachant qu'il faut tenir compte d'une commission d'endos de 0,90 % l'an, d'une commission fixe de 0,15 F et d'une taxe sur l'agio de 8,50 %, quelle est la valeur nette de l'effet?

943. Le 23 février d'une année bissextile, M. Debard tire sur son client André une lettre de change de 2 800 F au 31 mars. Le 27 février, M. Debard négocie cette lettre de change au Crédit Lyonnais (commission : 1/2 % ; change de place : 1/4 % ; ces deux retenues sont indépendantes du temps). Le banquier lui remet net 2 763,60 F. A quel taux l'effet a-t-il été escompté?

944. Le 15 mars, on remplace quatre paiements de 320 F au 30 mars, de 450 F au 24 avril, de 270 F au 14 mai, de 145 F au 3 juin par un paiement unique de 1 190 F. Déterminer l'échéance de ce paiement unique au taux de 4,50 %.

945. Le 1er octobre, on remplace les trois effets suivants : 860 F payable le 25 octobre, 750 F payable le 15 novembre, 900 F payable le 25 décembre, par un effet unique payable le 31 décembre. Quelle est la valeur nominale de cet effet unique? Taux 4,50 %.

946. Un commerçant doit payer à un même fournisseur les trois effets suivants : 8 000 F le 10 mai, 10 000 F le 15 juin, 12 000 F le 20 juillet. Le 30 avril, ce commerçant obtient de ce fournisseur de remplacer ces trois effets par un paiement unique d'un montant égal à la valeur nominale des trois effets. Déterminer la date de ce paiement unique. Utiliser le taux 6 %.

947*. Un négociant présente à l'escompte deux billets payables le premier dans 5 mois, le second dans 2 mois 1/2 ; la valeur nominale du second billet est les 2/3 de celle du premier et l'escompte est effectué au taux de 6 %.

Ce négociant achète avec la somme qu'il retire de l'escompte un terrain rectangulaire dont le périmètre est 462 m et la largeur les 4/7 de la longueur. Le terrain ayant été payé à raison de 2 000 F l'hectare, on demande la valeur du terrain (valeur actuelle des billets), la valeur nominale de chacun des billets.

948. Le 1er mars, un commerçant remet à son créancier, pour acquitter une dette, deux effets de commerce et 1 520 F en billets de banque. La dette est ainsi complètement remboursée. L'échéance du premier effet — dont la valeur nominale est de 3 000 F — est le 1er avril ; celle du deuxième effet est le 12 mai. L'escompte qu'il supporte est 3 fois plus élevé que celui du premier.

Trouver le montant de la dette sachant que le taux d'escompte est 6 %.

949*. Un commerçant a l'habitude de tirer des effets à 60 *j* d'échéance. Ces effets sont remis à l'escompte immédiatement. Les conditions du banquier sont : taux d'escompte, 4,50 % ; commission fixe de manipulation, 1 F ; commission générale (indépendante du temps), 1/8 %.

1° Exprimer en fonction de la valeur nominale V, le montant de l'agio. Quel est le nominal correspondant à un agio de 3,80 F?

2° Chez un autre banquier, l'escompte s'effectue aux conditions suivantes : taux d'escompte, 4 % ; commission d'acceptation, 0,50 F ; commission générale : 1/3 %.

Quels sont les effets que ce commerçant a intérêt à négocier chez ce deuxième banquier?

950*. Un commerçant est en relation avec trois banques qui lui font les conditions suivantes :

Banque A : taux d'escompte, 5 % ; commission, 0,25 % ;
Banque B : taux d'escompte, 4 % ; commission, 0,50 % ;
Banque C : taux d'escompte, 3 % ; commission, 0,75 %.
(La commission est indépendante du temps.)

1° A quelle banque s'adressera-t-il s'il doit remettre à l'escompte un effet à 60 *j*?

2° Il remet le 31 mars à la banque B, pour être escomptés, trois effets respectivement de 320 F (au 18 mai), de 460 F (au 25 mai), de 830 F (au 4 juin). Calculer le montant net que le commerçant recevra de la banque B.

PROBLÈMES SUR LE CHAPITRE VII

Grandeurs proportionnelles.

951. Trois associés A, B, C ont acheté un fonds de commerce dont le coût, compte tenu des frais s'élevant à 24 % de la valeur du fonds, a été 74 400 F.

1° Calculer la valeur du fonds.

2° Les sommes payées par ces trois associés pour l'achat du fonds, frais compris, sont respectivement proportionnelles aux nombres 9, 10, 12. Calculer ces trois sommes.

3° Le bénéfice net de l'année ayant été 10 400 F, il a été réparti proportionnellement aux sommes calculées au paragraphe 2° :

a) Calculer le pourcentage de bénéfice par rapport au coût du fonds.

b) Faire la répartition du bénéfice entre les trois associés.

952. On partage une somme de 4 200 F entre trois personnes proportionnellement aux nombres 6, 7, 8. Quelles sont les parts des trois personnes?

On partage une somme S proportionnellement aux trois nombres entiers consécutifs $n-1$, n, $n+1$.

1° Évaluer les parts des trois personnes en fonction de S et de n.

2° Montrer que la différence entre la troisième part et la première est double de la différence entre la troisième part et la seconde.

3° n étant égal à 7, comment choisir S pour que les trois parts soient des nombres entiers ?

953. Un entrepreneur achète, dans l'angle droit que font deux routes à leur croisement, trois terrains rectangulaires A, B, C. Les terrains A et B ont même longueur, la somme de leurs largeurs est 27 *m*. Les terrains B et C ont même largeur et la longueur de C est 24 *m*. Ces trois terrains sont payés respectivement 17 640 F, 22 050 F, 25 200 F, le prix du mètre carré étant le même pour chacun d'eux.

1° Trouver la largeur du terrain A et celle du terrain B.

2° Calculer le prix du mètre carré.

3° Indiquer les autres dimensions des terrains.

954. Un cultivateur a 120,400 m^3 d'engrais pour fumer trois terrains de superficie et de qualités différentes. Le premier a une superficie de 4 *ha* 8 *a* et sa qualité est représentée par 4. Le deuxième, de 45 900 m^2, a pour qualité 5. Le troisième, de qualité 6, a pour superficie 1 hm^2 53 dam^2. Le cultivateur répand l'engrais en raison directe de l'étendue et en raison inverse de la qualité des terrains. Combien doit-il répandre de mètres cubes d'engrais dans chaque terrain ?

955. Un terrain rectangulaire est divisé par deux parallèles aux bases en quatre parcelles rectangulaires inégales A, B, C, D dont les dimensions sont mesurées par les nombres m, p ; n, p ; n, q ; m, q. Les dimensions du terrain sont : $(m+n)$ et $(p+q)$.

1° Les aires des quatre parcelles sont entre elles respectivement comme les quatre nombres 24, 20, 15, x. Calculer les rapports $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}\cdot$ Calculer le rapport de l'aire de la parcelle D à l'aire de chacune des autres parcelles. Déterminer d'après cela le nombre x. Évaluer l'aire de chaque parcelle, sachant que l'aire totale du terrain est 7 700 m^2.

2° Les quatre parcelles A, B, C, D sont vendues aux prix respectifs de a, b, c, d francs le mètre carré. Les sommes produites respectivement par la vente de chacune des parcelles sont entre elles comme les nombres 32, 30, 25, 27. Calculer les rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{c}\cdot$ Démontrer que $b = d$. Calculer a, b, c, d sachant que $a + b + c + d = 90$.

956. Une gratification est partagée entre trois vendeurs proportionnellement à leurs ventes (A, 20 000 F ; B, 15 000 F ; C, 10 000 F) et à leurs années de service (A, 6 ans ; B, 5 ans ; C, 4 ans). Le total des parts de B et de C est inférieur de 6 F à la part de A. Calculer le montant total de la gratification et la part de chaque vendeur.

957. Un entrepreneur décide en fin d'année de partager une gratification de 667 F entre ses trois employés. Il décide de faire le partage à la fois en raison directe des années de service et en raison inverse des gains mensuels. Calculer la part de chaque employé, sachant que :
A a 18 ans de service et gagne 720 F par mois;
B a 12 ans de service et gagne 480 F par mois;
C a 6 ans de service et gagne 640 F par mois.

958*. Deux associés fondent une entreprise et apportent respectivement 150 000 F et 200 000 F. Au bout de 6 mois, un troisième associé se joint aux deux premiers et apporte 300 000 F. A la fin de la première année, le bénéfice s'élève à 72 000 F. Les deux premiers associés sont gérants et prélèvent chacun 20 % du bénéfice réalisé, puis le reste est partagé proportionnellement au temps de présence dans l'entreprise et aux capitaux engagés. Quelle est la part de bénéfice reçue par chacun des associés?

Pourcentages. Bénéfices.

959. Une société au capital de 200 000 F est constituée entre André, Bernard, Charles. A la fin de la première année, le bénéfice est ainsi partagé :
— 5 % à une réserve légale;
— 15 % du solde au gérant André;
— le reste entre les trois associés proportionnellement à leurs apports en capital : André reçoit à ce titre 12 112,50 F, Bernard 4 845 F, Charles 7 267,50 F.
1° Déterminer le montant des apports en capital de chaque associé.
2° Calculer le bénéfice réalisé au cours de l'année.

960*. Un commerçant A vend ses marchandises compte tenu d'un pourcentage de marge brute de 25 % sur le coût d'achat. Il accorde à ses clients une remise de 4 % du prix de vente et verse à son représentant une commission de 5 % sur le net de la facture.
1° Quel est le coût d'achat d'un article *a* dont le prix de vente marqué est 137,50 F?
2° Calculer au 1/10 000 près le coefficient par lequel il faut multiplier le coût d'achat pour obtenir le prix de vente marqué.
3° Son concurrent B applique un taux de marque de 20 %. Pour un même article, ayant même coût d'achat pour les deux commerçants, le prix de vente marqué par A est supérieur de 18,09 F au prix de vente marqué par B. Quel est le coût d'achat de cet article?

961*. Un fabricant vend une marchandise à un grossiste en prenant un bénéfice de 20 % de son coût de production. Le grossiste vend cette marchandise à un détaillant en comptant un taux de marque de 25 %. Le détaillant calcule à son tour le prix de vente au client en prenant un taux de marque de 20 % ; ce prix de vente est 250 F.
1° Déterminer le coût de production du fabricant.
2° Sachant que la matière première entre pour 40 % dans ce prix, à combien l'évaluez-vous ?
3° Quel serait le coefficient multiplicateur qui permettrait de passer directement du coût de production du fabricant au prix de vente au client?

962*. Un commerçant achète des articles à 125 F l'un. Il obtient de son fournisseur deux remises successives de 10 % et 5 % et un escompte de règlement (pour prompt paiement) de 2 %. Les frais de transport s'élèvent à 8 % du prix d'achat brut. Ce commerçant pense pratiquer un taux de marque de 25 %.
1° Quel est le prix marqué d'un article (il n'est tenu compte d'aucune taxe)?
2° Quel coefficient multiplicateur doit-il appliquer au coût d'achat pour trouver directement le prix de vente?
3° Le prix d'achat brut d'un article subit une augmentation de 10 F. Quel sera le nouveau prix de vente si les pourcentages des autres éléments sont inchangés?
4° En fin de série, après l'augmentation, le commerçant solde ses articles avec 15 % de rabais. Quel sera alors, à ce moment-là, son pourcentage de bénéfice par rapport au prix de vente? et par rapport au coût d'achat?

963*. Un commerçant achète en Angleterre 250 yards de drap à £ 1.18/6 le yard. Les frais de transport par mer s'élèvent à £ 4.7/9.

1° Calculer en monnaie anglaise le coût du drap rendu au port français.

2° Les frais de débarquement et de transport au magasin s'élèvent à 198 F. Calculer en francs le coût du mètre de drap à l'arrivée au magasin. On sait que £ 1 = 13,80 F et que 35 yards = 32 *m*.

3° Le commerçant désire réaliser un bénéfice de 20% sur son prix de vente hors taxe et tenir compte des taxes s'élevant à 5% du prix de vente marqué. Calculer le prix marqué du mètre de drap.

964. 1° Quel est le prix de vente net d'un objet marqué 100 F et sur lequel on a fait une remise de 10% et un escompte de règlement de 2% ?

2° Le prix de vente net d'un objet sur lequel les réductions précédentes ont été appliquées est de 3 528 F. Quel était le prix marqué de cet objet avant déduction des rabais ? Quel est le pourcentage de la réduction consentie ?

965*. Un importateur français achète en Suisse un objet à raison de 5 francs suisses (FS), livré à la frontière. Il règle en France divers frais et taxes s'élevant à 25% du prix de l'objet à l'entrée sur le territoire français. A la revente, l'importateur supporte 20% de frais et taxes sur le prix de vente. Il voudrait réaliser un bénéfice de 1 F français par objet revendu, tous frais et taxes (énumérés dans le texte) étant récupérés. Sachant que, lors de la revente, l'administration rembourse à cet importateur une taxe de 12,50% sur le prix à l'entrée, calculer le prix de revente à pratiquer par l'importateur lorsque 1 FS vaut 1,13 F français.

966*. Le prix de vente définitif d'une marchandise comprend le prix de vente hors taxe, une taxe de 1%, la taxe à la valeur ajoutée ; ces deux taxes sont calculées sur le prix de vente définitif.

1° Calculer le montant de chacune de ces taxes pour un prix de vente hors taxe de 100 F dans le cas où la taxe à la valeur ajoutée est fixée à 15,10%.

2° Supposer que le prix de vente sans taxe est 70,31 F. Établir les formules qui expriment le montant de la taxe de 1% dans les deux cas suivants :

— 1er cas : taxe à la valeur ajoutée fixée à x% ;

— 2e cas : taxe à la valeur ajoutée fixée à $2x$%.

Intérêts.

967*. Une personne dispose d'un capital de 4 720 F. Elle en place une partie à 3% et le reste, 1 mois plus tard, à 6%.

1° Sachant que 6 mois après le premier placement les deux placements ont rapporté ensemble 94 F d'intérêts, trouver le montant des deux sommes placées.

2° Au bout de combien de mois les valeurs acquises par ces deux sommes placées seront-elles égales ? La valeur acquise est la valeur du capital augmenté de ses intérêts.

968. Un particulier possède un capital. Il en place les 3/5 à 5% pendant 45 *j*, les 2/3 du reste à 8% pendant 9 mois et le reste qui s'élève à 1 000 F à un certain taux pendant 2 ans 1/2. Au bout de ce temps, les placements lui ont rapporté un intérêt de 448,125 F. Trouver le capital possédé par ce particulier. Quel est le taux du troisième placement ?

969. 1° Deux capitaux, placés tous les deux au même taux, le premier pendant 3 mois, le second pendant 5 mois, ont produit le même intérêt. Lequel des deux capitaux est le plus élevé ? Quel est le rapport du premier capital au second ?

2° La somme de ces deux capitaux est 800 000 F. Quels sont-ils ?

3° Quel est le taux auxquel ces deux capitaux doivent être placés pour produire chacun 5 000 F d'intérêt, le premier capital pendant 3 mois, le second pendant 5 mois ?

970*. Un père de famille veut partager un capital de 13 000 F en trois parts, de telle sorte que chacun de ses enfants, âgés de 12, 14, 16 ans, reçoive, lorsqu'il atteindra 20 ans, les intérêts simples de sa part respective placée à un certain taux (le même pour ses trois enfants).

Quel doit être le montant de chaque part pour que chaque enfant reçoive une part égale d'intérêts à l'âge de 20 ans?

971*. Une personne possède une certaine somme qu'elle partage en trois parties A, B, C, proportionnelles à 7, 6, 5. La différence entre les capitaux B et C est 100 000 F.

1° Trouver ces capitaux et la somme partagée.
2° Ces capitaux sont placés respectivement à des taux proportionnels à 4, 6, 8. En désignant par T la somme de ces taux, les exprimer en fonction de T.
3° Le capital C est placé pendant 18 mois au taux précédent et rapporte 48 000 F.
Calculer T. En déduire les différents taux.

972*. Une personne place un capital de 4 500 F en deux parts à des taux différents. Les parts sont proportionnelles à 5 et à 4 et la première placée à 3 % rapporte autant en 8 mois que la seconde en 6 mois.
1° Quelles sont les sommes placées?
2° Quel est le taux du second placement?
Après 2 ans de placement dans les conditions ci-dessus, cette personne retire son capital augmenté des intérêts pour acheter un champ. Les frais d'achat s'élèvent à 15 % du prix d'achat. Sachant qu'il lui reste 250 F après l'opération, déterminer le prix d'achat du champ.

Escompte.

973*. Le 7 avril, on désire remplacer au taux de 6 % deux effets de commerce désignés par A et par B (A a une valeur nominale de 1 200 F et échoit le 6 juin ; B a une valeur nominale inconnue et son échéance est également inconnue) par deux autres effets C et D (C a une valeur nominale de 1 000 F et échoit le 4 octobre ; D a une valeur nominale inconnue et échoit le 4 mai).
On sait, en outre, que la somme des valeurs nominales des effets A et B remplacés est égale à la somme des valeurs nominales des effets C et D de remplacement, que la somme des valeurs actuelles des effets C et D est égale à 2 961 F.
Calculer les valeurs nominales des effets B et D, puis l'échéance de l'effet B.

974*. Lors de son inventaire au 31 décembre, un commerçant constate que quatre créances litigieuses d'un montant total de 1 459,15 F représentent en moyenne 26,53 % du montant total de ses créances. Quel est le montant total des créances non litigieuses?
Les quatre créances litigieuses sont inversement proportionnelles aux nombres 42, $\frac{10}{3}$, 5, 10. Quel est le montant de chacune d'elles? Parmi les créances incontestées, un débiteur d'une somme de 480 F payable le 19 février demande à remplacer cette dette par deux paiements, l'un de 285 F à effectuer le 20 janvier, l'autre — pour solde de tout compte — à effectuer le 21 mars. Quel est le montant de ce paiement pour que le remplacement soit équitable (taux : 6 % ; date d'équivalence : 31 décembre).

975*. Au Salon des Arts Ménagers, un vendeur offre à sa clientèle un appareil électrique payable au choix selon les deux modes de règlement suivants :
— Paiement comptant avec 5 % d'escompte de règlement sur le prix facturé.
— Paiement à la livraison 38,50 F et, au même moment, acceptation de 15 lettres de change mensuelles de 40 F, la première payable 30 *j* après la livraison. Ces traites étant négociées le jour de leur création, le deuxième mode de règlement est équivalent au premier. En plus de l'escompte retenu par le banquier, l'agio comprend une commission d'encaissement de 1 ‰, une commission d'endos de 0,05 % par mois, une commission de manipulation de 0,20 F par effet.
Sachant que le produit net de la négociation est 579 F, trouver le montant du prix facturé, puis le taux d'escompte utilisé par le banquier.

976*. M. Dupont décide d'acheter une propriété, mais il lui manque 5 000 F qu'il emprunte à un organisme de crédit. Il doit s'acquitter de sa dette envers cet organisme au moyen de 18 versements égaux échelonnés de mois en mois, le premier un mois après l'achat. Si le montant d'un versement s'élève à 310 F et si l'on considère qu'il y a équivalence le jour de l'achat entre les 18 versements et la somme empruntée, quel est le taux de l'emprunt?

CARRÉS ET RACINES CARRÉES DES NOMBRES DE 1 A 100

NOMBRES	CARRÉS	RACINES CARRÉES	NOMBRES	CARRÉS	RACINES CARRÉES
1	1	1,000	51	2 601	7,141
2	4	1,414	52	2 704	7,211
3	9	1,732	53	2 809	7,280
4	16	2,000	54	2 916	7,349*
5	25	2,236	55	3 025	7,416
6	36	2,450*	56	3 136	7,483
7	49	2,646*	57	3 249	7,550*
8	64	2,828	58	3 364	7,616*
9	81	3,000	59	3 481	7,681
10	100	3,162	60	3 600	7,746
11	121	3,317*	61	3 721	7,810
12	144	3,464	62	3 844	7,874
13	169	3,606*	63	3 969	7,937
14	196	3,742*	64	4 096	8,000
15	225	3,873	65	4 225	8,062
16	256	4,000	66	4 356	8,124
17	289	4,123	67	4 489	8,185
18	324	4,243*	68	4 624	8,246
19	361	4,359*	69	4 761	8,307*
20	400	4,472	70	4 900	8,367*
21	441	4,583*	71	5 041	8,426
22	484	4,690	72	5 184	8,485
23	529	4,796*	73	5 329	8,544
24	576	4,899	74	5 476	8,602
25	625	5,000	75	5 625	8,660
26	676	5,099	76	5 776	8,718*
27	729	5,196	77	5 929	8,775
28	784	5,292*	78	6 084	8,832*
29	841	5,385	79	6 241	8,888
30	900	5,477	80	6 400	8,944
31	961	5,568*	81	6 561	9,000
32	1 024	5,657*	82	6 724	9,055
33	1 089	5,745*	83	6 889	9,110
34	1 156	5,831	84	7 056	9,165
35	1 225	5,916	85	7 225	9,220*
36	1 296	6,000	86	7 396	9,274*
37	1 369	6,083*	87	7 569	9,327
38	1 444	6,164	88	7 744	9,381*
39	1 521	6,245	89	7 921	9,434
40	1 600	6,325*	90	8 100	9,487*
41	1 681	6,403	91	8 281	9,539
42	1 764	6,481*	92	8 464	9,592*
43	1 849	6,557	93	8 649	9,644*
44	1 936	6,633	94	8 836	9,695
45	2 025	6,708	95	9 025	9,747*
46	2 116	6,782	96	9 216	9,798
47	2 209	6,856*	97	9 409	9,849*
48	2 304	6,928	98	9 604	9,900*
49	2 401	7,000	99	9 801	9,950*
50	2 500	7,071	100	10 000	10,000

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I

OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES ENTIERS

CHAPITRE II

DIVISIBILITÉ

CHAPITRE III

FRACTIONS ET NOMBRES DÉCIMAUX

IMPRIMERIE CRÉTÉ Paris, Corbeil-Essonnes. — Dépôt légal : 1er trimestre 1970.
3015-1-70. — Imprimé en France. — Dépôt éditeur : n° 3797.